6. Fuzzy irányítási rendszerek

Gépi intelligencia I.

Fodor János

BMF NIK IMRI

NIMGI1MIEM

Tartalomjegyzék I

BEVEZETÉS

Mi a fuzzy irányítás?

- Az irányítás (vezérlés, szabályozás) egy dinamikus rendszer paramétereinek folyamatos adaptálását jelenti egy adott cél elérése érdekében.
- Egy vezérlő megtervezéséhez szükség van a dinamikus rendszer modelljére.
- Gyakran csak hiányos, pontatlan, bizonytalan információ áll rendelkezésre – ezért a fuzzy rendszerek alkalmas alternatívát kínálnak.
- A fuzzy irányítás nem más, mint fuzzy halmazok/rendszerek alkalmazása ilyen vezérlési feladatokra.

A kezdetek

- Zadeh (1973): nyelvi változók használata nagy bonyolultságú rendszerek leírására (fuzzy halmazok + „HA-AKKOR" szabályok); magas dimenziójú fuzzy relációk – bonyolult, nagy számításigény.
- Mamdani (1975): egyszerűsített modell; k-dimenziós relációk helyett k számú egydimenziós relációvetület hengeres kiterjesztésének metszete; számításigény drasztikusan csökken.
- Első igazi alkalmazás: Mamdani, egy valós, erősen nemlineáris gőzgépes-gőzkazános rendszer irányítására.
- A sikeres alkalmazások jelentős része kísérleti hangoláson, elméleti megalapozottság nélkül, egyszerűen a stabil viselkedés megfigyelésén alapul.

Fuzzy irányítási modellek

- Különösebb irányításelméleti ismeretek nélkül is lehetőség van fuzzy irányítási modellek megalkotására, a szemlélet alapján.
- A tervező összerendelt, közelítőleg ismert bemenet-kimenet párok sokaságát valósítja meg.
- Minden egyes közelítő bemenet-kimenet értékpárt egy fuzzy szabály reprezentál.
- Kvázioptimális algoritmus hangolás segítségével állítható be.
- Így mindig csak közelítő modellt kapunk. Ezért olyan rendszerek esetén érdemes fuzzy modellt alkalmazni, amelyekre pontos analitikus modellt nem lehet felállítani, vagy amelyek eredendő bonyolultsága nagy.

Hagyományos irányítási modellek feltevései

- *Az irányított rendszer ismert.* A rendszert valamely modellje segítségével reprezentáljuk (identifikáljuk), amelynek létrehozásához szükség van a rendszerről rendelkezésre álló összes lényeges információra. Ekkor a rendszer kimeneti válasza a modell alapján tetszőleges bemenet esetén kiszámítható.
- Az irányítás függvénye tömör matematikai formulák formájában adott, amelyek tartalmazzák a rendszer változó paramétereit (ezt az információt nevezik a rendszer *teljesítményindexének*).
- Ha teljesülnek ezek a feltételek, akkor a rendszer modellje a klasszikus irányításelmélet módszereivel megalkotható, és meghatározható a működését irányító optimális rendszer, illetve kiszámíthatók ez utóbbi paraméterei.

FUZZY IRÁNYÍTÁSI RENDSZEREK FELÉPÍTÉSE

Négy fő összetevő

Egy fuzzy irányítási rendszernek négy fő összetevője van:

1. a szabálybázis;
2. az illeszkedési mértéket meghatározó egység;
3. a következtető egység;
4. a defuzzifikáló egység (nem mindig van rá szükség).

A szabálybázis

- Az adott rendszer működését leíró „HA-AKKOR” típusú szabályok összességét nevezzük szabálybázisnak.
- „HA $x = A$, AKKOR $y = B$” (A és B fuzzy halmazok; A: előzmény vagy antecedens; B: következmény; x: bemeneti változó; y: kimeneti változó).
- Példa: közlekedési lámpa működését irányító fuzzy rendszer; Szabály: „HA a forgalom erős északi irányban, AKKOR a lámpa legyen hosszabb ideig zöld.”
  Ekkor x : „északi irányú forgalom”, y : mi a teendő a lámpával, A : „*erős* forgalom”, $B =$ „*hosszabb ideig* legyen zöld”.

Az illeszkedés mértékét meghatározó egység

- A szabálybázis előzményeit hasonlítja össze az aktuális megfigyeléssel: a hasonlóság alapján meghatároz egy 0 és 1 közötti értéket. Ez a szám az illeszkedés mértéke.
- *Tüzelő* szabály: amelyben az előzmény és a megfigyelés metszete nem üres.
- A tüzelő szabályoknál az illeszkedés mértékének megfelelően módosított következmények kerülnek be a következtető egységbe.

A következtető egység

- Az illeszkedési mértékkel mint súllyal kombinálja (általában egy t-normával) a szabálybázisban található tüzelő szabályok következményeit.
  - A Mamdani-féle módszerben: a minimummal.
  - A Larsen-féle módszerben: a szorzattal.
- A következtető egység kimenete egy általában nem konvex és nem normált fuzzy mennyiség.
- A Takagi-Sugeno-féle módszer esetén a kombinációs művelet más jellegű (ott a következmények crisp függvények).

A defuzzifikáló egység

- Egyetlen crisp számot képezünk a következtető egység kimeneteként kapott fuzzy halmazból, annak legjellemzőbb, legtipikusabb elemeként. Ez a defuzzifikálás.
- A főbb defuzzifikáló módszerek
    - a mag középső vagy szélső tipikus értékét, vagy
    - a tagsági függvény alatti terület középpontját, vagy
    - a függvény alatti területet egy mechanikai lemeznek felfogva, annak súlypontját

  választják ki.
- Nem mindig kell defuzzifikálni (pl. emberi kezelő számára készített output).

A szabálybázis

Kiindulás

Tekintsünk egy olyan rendszert, amelynek n bemenete és egyetlen kimenete van. Ennek megfelelően van n nyelvi változónk:

$$\begin{aligned} v_1 &= (N_1, G_1, T_1, X_1, M_1), \\ \vdots &= \vdots \\ v_n &= (N_n, G_n, T_n, X_n, M_n), \end{aligned}$$

amelyek a rendszer n bementetét reprezentálják, és van egyetlen nyelvi változónk, amelyik a kimementhez tartozik:

$$v_y = (N_y, G_y, T_y, X_y, M_y)$$

Nyelvi változók (emlékeztető)

Egy *nyelvi változó* az alábbi rendezett ötös

$$V = (N, G, T, X, M),$$

ahol N, T, X, G, és M a következő:

1. N a V nyelvi változó neve
2. G a nyelvtan
3. T az úgynevezett *term halmaz*, azaz a G alapján származtatható nyelvi kifejezések halmaza
4. X az alaphalmaz
5. M egy $T \to \mathcal{F}(X)$ leképezés, amelyik a szemantikát (X egy fuzzy részhalmazát) definiálja minden egyes T-beli nyelvi kifejezésre.

Fuzzy szabályrendszer m szabállyal

$$
\begin{array}{llll}
\text{HA} & \mathit{cond}_1 & \text{AKKOR} & \mathit{action}_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{HA} & \mathit{cond}_m & \text{AKKOR} & \mathit{action}_m
\end{array}
$$

A $cond_i$ előzmények (feltételek) és az $action_i$ következmények (műveletek, akciók) olyan kifejezések, amelyeket valamilyen alkalmas szintaxisnak megfelelően építünk fel.

Példa: a feltételek egy általános szintaxisa

$$
\begin{array}{lcl}
\perp & := & \langle \text{exp} \rangle \;; \\
\langle \text{exp} \rangle & := & \langle \text{iscondition} \rangle \mid \text{„(”}\ \langle \text{exp} \rangle\ \langle \text{binary} \rangle\ \langle \text{exp} \rangle\ \text{„)”} \mid \\
 & & \text{„(not”}\ \langle \text{exp} \rangle\ \text{„)”;} \\
\langle \text{binary} \rangle & := & \text{„and”} \mid \text{„or”} \;; \\
\langle \text{iscondition} \rangle & := & \langle N_i \rangle\ \text{„is”}\ \langle l^i_j \rangle \;;
\end{array}
$$

Valamely $i = 1, \ldots, n$ esetén $\langle N_i \rangle$-t az i-edik nyelvi változó nevével lehet kiterjeszteni, míg $\langle l^i_j \rangle$-t egy megfelelő „term”-mel T_i-ből.

Egy egyszerű szintaxis az akciókra

$$\perp \quad := \quad \langle N_y \rangle \text{ „is" } \langle l_{y_j} \rangle \ ;$$

$\langle l_{y_j} \rangle$-t egy T_i-ből vett megfelelő „term"-mel lehet kiterjeszteni.

Példa

Tekintsünk egy két bemenetből és egy kimenetből álló rendszert:

$$v_1 = (N_1 = „\varphi", G_1, T_1 = \{„\mathrm{nb}", „\mathrm{ns}", „\mathrm{z}", „\mathrm{ps}", „\mathrm{pb}"\}, \\ X_1 = [-30, 30], M_1),$$

$$v_2 = (N_2 = „\dot{\varphi}", G_2, T_2 = \{„\mathrm{nb}", „\mathrm{ns}", „\mathrm{z}", „\mathrm{ps}", „\mathrm{pb}"\}, \\ X_2 = [-30, 30], M_2),$$

$$v_y = (N_y = „f", G_y, T_y = \{„\mathrm{nb}", „\mathrm{ns}", „\mathrm{z}", „\mathrm{ps}", „\mathrm{pb}"\}, \\ X_y = [-100, 100], M_y)$$

Példa (folyt.)

$$
\begin{array}{ll}
\text{HA } (\varphi \text{ „is'' z and } \dot{\varphi} \text{ „is'' z)} & \text{AKKOR } f \text{ „is'' z} \\
\text{HA } (\varphi \text{ „is'' ns and } \dot{\varphi} \text{ „is'' z)} & \text{AKKOR } f \text{ „is'' ns} \\
\text{HA } (\varphi \text{ „is'' ns and } \dot{\varphi} \text{ „is'' ns)} & \text{AKKOR } f \text{ „is'' nb} \\
\text{HA } (\varphi \text{ „is'' ns and } \dot{\varphi} \text{ „is'' ps)} & \text{AKKOR } f \text{ „is'' z} \\
\vdots \quad \vdots & \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

Hogyan definiálhatunk egy kontroll függvényt ezekből a szabályokból?
[ugrás a fuzzy halmazokhoz]

Tipikus szabálybázis

Kevésbé formálisan egy tipikus szabálybázis i-edik szabálya a következő módon néz ki:

$$R_i: \text{ Ha } x_1 = A_{1,i} \text{ és } \ldots \text{és } x_n = A_{n,i}, \text{ akkor } y = B_i.$$

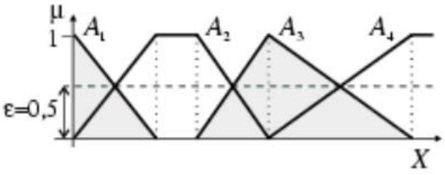
Ez azt is mutatja, hogy a szabály alkalmazásának feltétele, hogy az *összes* bemeneti változó értéke pozitív mértékben essen a megfelelő előzmény halmazba.

Fuzzy partíciók

- Az egyes nyelvi változók lehetséges értékei felosztják, illetve részlegesen lefedik a változóhoz tartozó alaphalmazt. Követelmény: minden lehetséges bemeneti értékre létezzen pozitív tagsági értékű információ.
- Formálisan: Ha az X alaphalmazon értelmezett v változóhoz az $\{A_1, \ldots, A_k\}$ fuzzy halmazok tartoznak, akkor minden $x \in X$ esetén legyen olyan $1 \leq i \leq k$, amelyre $A_i(x) \geq \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$ az X lefedettségének mértéke. Ekkor az $\{A_1, \ldots, A_k\}$ az X alaphalmaz egy *fuzzy partíciója*.
- Erre azért van szükség, hogy minden megfigyeléshez létezzék a szabálybázisban olyan szabály, amely alapján az irányítási rendszer képes valamilyen következtetés meghozatalára.

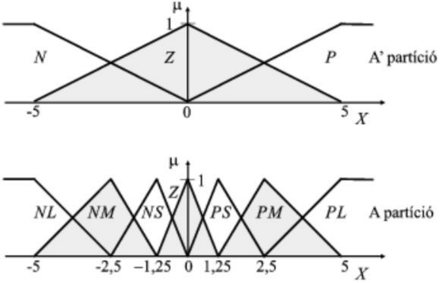
Ruspini-partíciók

- Egy olyan $\{A_1, \ldots, A_k\}$ fuzzy partíciót, amelyre
$$A_1(x) + \ldots + A_k(x) = 1$$
minden $x \in X$ esetén, *Ruspini-partíciónak* nevezünk.
- Háromszög és trapéz alakú tagsági függvények esetén könnyű Ruspini-partíciót készíteni, amint az az alábbi ábrán jól látszik.



Fuzzy partíciók – pontosság és nyelvi kifejezőerő

- Minél több nyelvi kifejezést tartalmaz egy fuzzy partíció, a nyelvi címkék kifejezőereje annál kisebb lesz.
- A felhasznált fuzzy halmazok számánál ésszerű kompromisszumra kell törekedni a pontosság és a nyelvi kifejezőerő (és amint később látjuk, a számítási bonyolultság) között.



Az illeszkedés mértékét meghatározó egység

Rekurzív kiszámítás

Tegyük fel, hogy van n db crisp bemenő értékünk: $x_i \in X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, és legyen (T, S, N) egy rögzített De Morgan hármas.

Egy $cond_i$ feltétel $t_i = t(cond_i)$ igazságértékét (az illeszkedés mértékét) az alábbiak alapján rekurzív módon tudjuk kiszámítani (a szintaxis a fenti példából való):

$$
\begin{aligned}
t(N_i \text{ is } l^i_j) &= M_i(l^i_j)(x_i) \\
t(a \text{ and } b) &= T(t(a), t(b)) \\
t(a \text{ or } b) &= S(t(a), t(b)) \\
t(\text{not } a) &= N(t(a))
\end{aligned}
$$

Példa: crisp bemenet

Tekintsünk egy tipikus szabályt:

$$R_i: \text{ Ha } x_1 = A_{1,i} \text{ és } \ldots \text{és } x_n = A_{n,i}, \text{ akkor } y = B_i.$$

Ha a megfigyelési vektorunk $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in X_1 \times \ldots \times X_n$, akkor az illeszkedés mértéke

$$t_i = t(cond_i) = T(A_{1,i}(x_1^*), \ldots, A_{n,i}(x_n^*)).$$

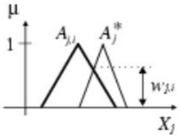
Példa: fuzzy bemenet

Tekintsünk megint egy tipikus szabályt:

$$R_i: \ \text{Ha } x_1 = A_{1,i} \text{ és } \dots \text{és } x_n = A_{n,i}, \text{ akkor } y = B_i.$$

Tegyük fel, hogy $T = T_{\mathbf{M}}$. Ha a megfigyelési vektorunk most fuzzy komponensekből áll, vagyis $(A_1^*, \dots, A_n^*)$, akkor az illeszkedés mértéke a j-edik dimenzióban ($j = 1, \dots, n$):

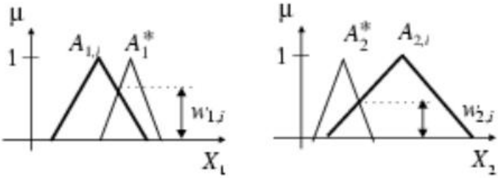
$$w_{j,i} = \max_x \{\min(A_j^*(x), A_{j,i}(x))\},$$



Példa: fuzzy bemenet (folyt.)

A bemenet illeszkedési mértékét az i-edik szabályhoz végül így kapjuk:

$$t_i = \min_{j=1}^{n} w_{j,i}.$$



A következtető egység

Előzetes megjegyzések

1. Előfordulhat, hogy adott bemenet esetén két vagy több szabály is tüzel.
2. Még az is előfordulhat, hogy ez két vagy több olyan szabályra eljesül, amelyhez tartozó következmények (akciók) különbözőek, esetleg egymásnak ellentmondók.
3. Ez egyáltalán nem probléma, sőt: nagyon előnyös lehet.
4. A következő azonban minden esetben alapkövetelmény: *Minél nagyobb egy szabály illeszkedési mértéke, annál nagyobb kell legyen annak hatása a kimenetre.*

Két alapvető megközelítés

Deduktív megközelítés: A szabályokat úgy tekintjük, mint logikai deduktív szabályokat (implikációkat).

Hozzárendelési megközelítés: A szabályokat úgy tekintjük, mint feltételes hozzárendeléseket (conditional assignments, mint egy procedurális programozási nyelvben), „fuzzy függvénygörbéket”.

Mindkét megközelítésben közös: először minden egyes szabályra meghatározzuk a kimeneti (következmény) fuzzy halmazt, aztán ezeket egyetlen globális kimeneti (következmény) fuzzy halmazzá aggregáljuk

Deduktív megközelítés

Fuzzy implikációk

S-implikáció:

Egy S t-konorma és egy N negáció esetén definiáljuk

$$I_{S,N}(x, y) = S(N(x), y).$$

Reziduális implikáció (R-implikáció):

Egy T (balról) folytonos t-norma esetén definiáljuk

$$\vec{T}(x, y) = \sup\{u \in [0, 1] \mid T(x, u) \leq y\}.$$

Példák

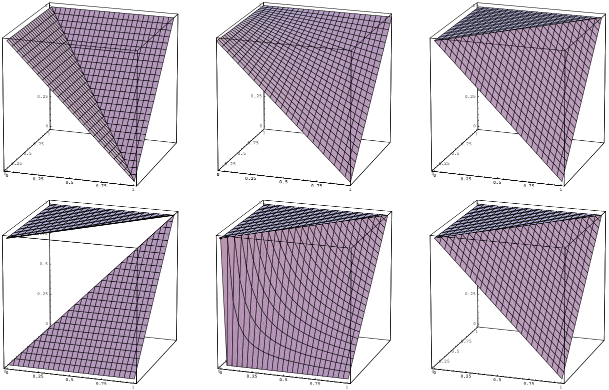
$$I_{S_{\mathbf{M}},N_{\mathbf{S}}}(x,y) = \max(1-x,y) \qquad \vec{T}_{\mathbf{M}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \le y \\ y & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$I_{S_{\mathbf{P}},N_{\mathbf{S}}}(x,y) = 1-x+x\cdot y \qquad \vec{T}_{\mathbf{P}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \le y \\ \frac{y}{x} & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$I_{S_{\mathbf{L}},N_{\mathbf{S}}}(x,y) = \min(1-x+y,1) \qquad \vec{T}_{\mathbf{L}}(x,y) = \min(1-x+y,1)$$

Példák (folyt.)

$I_{T_\mathrm{M},N_\mathrm{S}}$ $I_{T_\mathrm{P},N_\mathrm{S}}$ $I_{T_\mathrm{L},N_\mathrm{S}}$



$\overrightarrow{T}_\mathrm{M}$ $\overrightarrow{T}_\mathrm{P}$ $\overrightarrow{T}_\mathrm{L}$

Következtetés a deduktív megközelítésben – egyetlen szabály

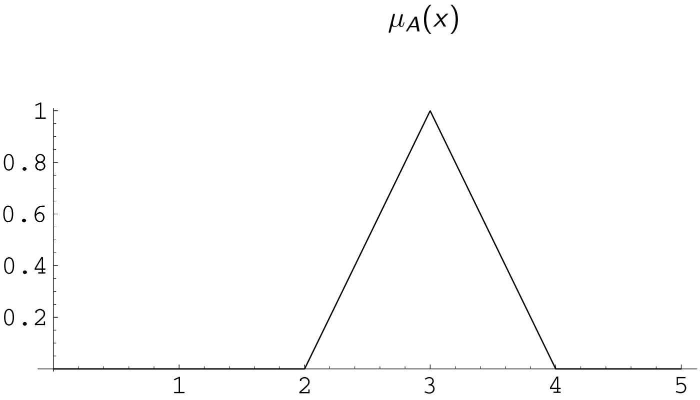
Rögzítsünk előre egy $\tilde{I}$ fuzzy implikációt. Tekintsük az i-edik szabályt, amelyik így néz ki:

$$\text{HA } cond_i \text{ AKKOR } N_y \text{ is } I_j^y.$$

Tegyük fel, hogy a $cond_i$ feltétel illeszkedési mértéke t_i. Ekkor az O_i kimeneti fuzzy halmazt a következő módon értelmezzük:

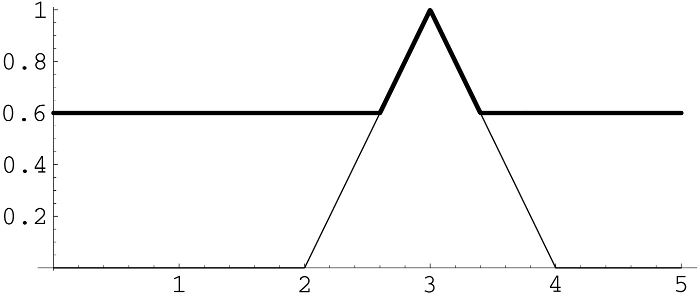
$$O_i(y) = \tilde{I}\left(t_i, M(I_j^y)(y)\right)$$

Példa



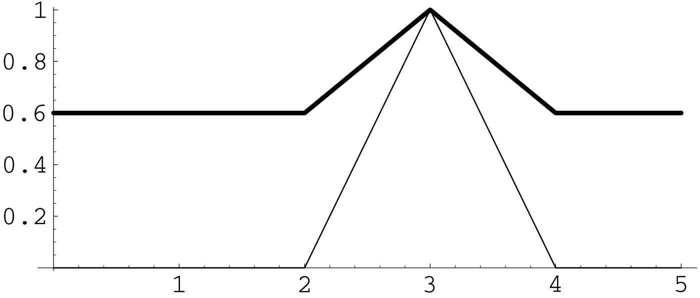
Példa

$$I_{S_{\mathsf{M}},N_{\mathsf{S}}}(0.4, \mu_A(x))$$



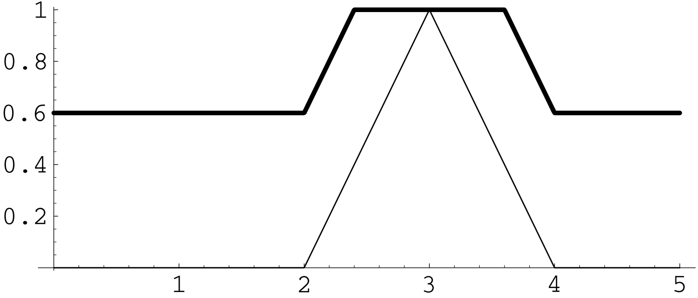
Példa

$$I_{S_\mathsf{P},N_\mathsf{S}}(0.4,\mu_A(x))$$



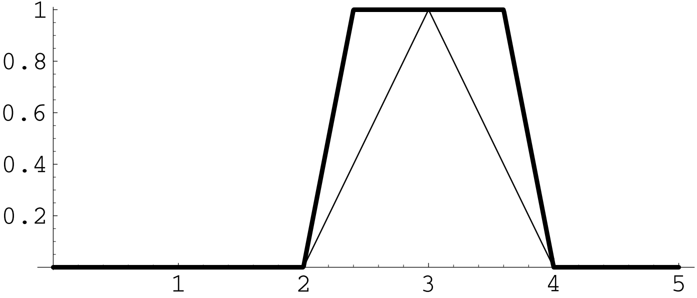
Példa

$$\overrightarrow{T}_{\mathbf{L}}(0.4, \mu_A(x))$$



Példa

$$\vec{T}_{\mathbf{P}}(0.4, \mu_A(x))$$



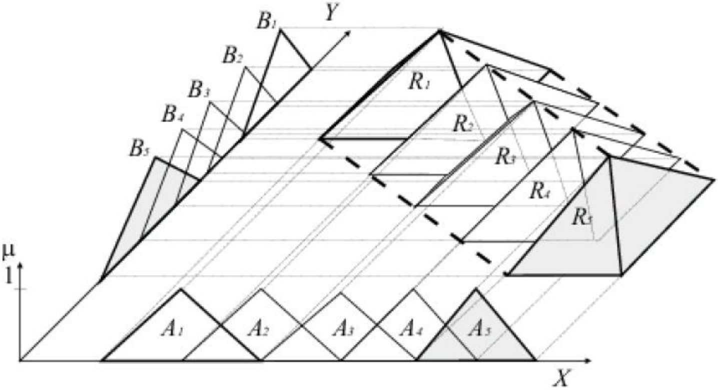
Globális következtetés a deduktív megközelítésben

Rögzítsünk előre egy $\tilde{T}$ t-normát. Tegyük fel, hogy az összes szabály O_i kimeneti fuzzy halmazait ($i = 1, \ldots, m$) kiszámítottuk. Ekkor a globális kimenet $\tilde{O}$ fuzzy halmazát így kapjuk:

$$\tilde{O}(y) = \tilde{T}\big(O_1(y), \ldots, O_m(y)\big).$$

Hozzárendelési megközelítés

Fuzzy hozzárendelés



Következtetés a hozzárendelési megközelítésben – egyetlen szabály

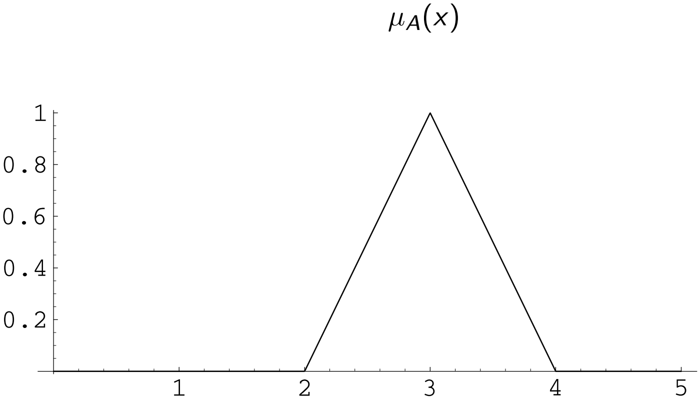
Rögzítsünk előre egy $\tilde{T}$ t-normát. Tekintsük az i-edik szabályt, amelyik így néz ki:

$$\text{HA } cond_i \text{ AKKOR } N_y \text{ is } l_j^y.$$

Tegyük fel, hogy a $cond_i$ feltétel illeszkedési mértéke t_i. Ekkor az O_i kimeneti fuzzy halmazt a következő módon értelmezzük:

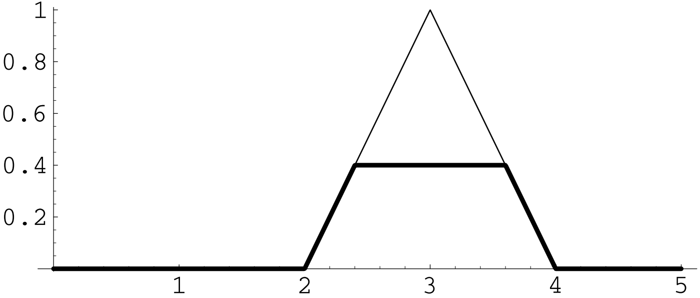
$$O_i(y) = \tilde{T}\big(t_i, M(l_j^y)(y)\big).$$

Példa



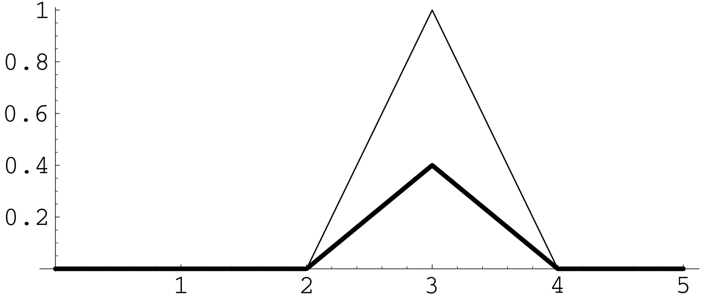
Példa (folyt.)

$T_{\mathbf{M}}(0.4, \mu_A(x))$



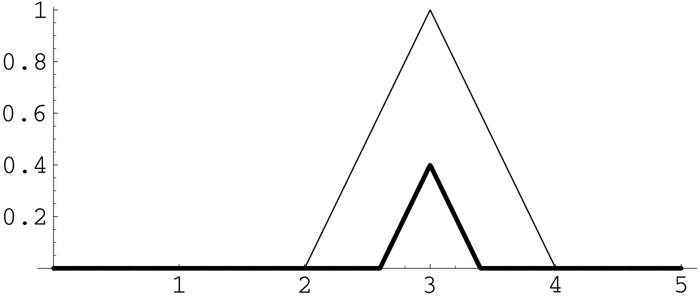
Példa (folyt.)

$$T_{\mathbf{P}}(0.4, \mu_A(x))$$



Példa (folyt.)

$T_{\mathbf{L}}(0.4, \mu_A(x))$



Globális következtetés a hozzárendelési megközelítésben

Rögzítsünk előre egy $\tilde{A}$ aggregációs operátort. Tegyük fel, hogy az összes szabály O_i kimeneti fuzzy halmazait $(i = 1, \ldots, m)$ kiszámítottuk. Ekkor a globális kimenet $\tilde{O}$ fuzzy halmazát így kapjuk:

$$\tilde{O}(y) = \tilde{A}\big(O_1(y), \ldots, O_m(y)\big).$$

Aggregációs operátorok

Egy

$$\mathbf{A} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0,1]^n \to [0,1]$$

függvényt *aggregációs operátornak* nevezünk, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. $\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n) \leq \mathbf{A}(y_1, \ldots, y_n)$ amikor $x_i \leq y_i$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén;
2. $\mathbf{A}(x) = x$ minden $x \in [0,1]$ esetén;
3. $\mathbf{A}(0, \ldots, 0) = 0$ és $\mathbf{A}(1, \ldots, 1) = 1$.

Aggregációs operátorok: példák

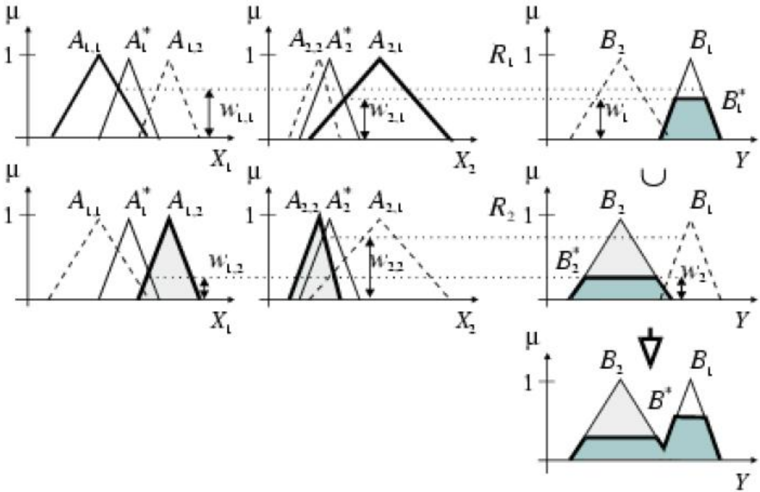
- Bármely t-norma és t-konorma aggregációs operátor (azzal, hogy $T(x) = x$ és $S(x) = x$).
- A súlyozott számtani, mértani közepek aggregációs operátorok.
- OWA (ordered weighted average) operátorok: Tekintsünk egy $(x_1, \dots, x_n)$ szám n-est és rendezzük csökkenő sorrendbe az elemeit: $\tilde{x}_1$ a legnagyobb,..., $\tilde{x}_n$ a legkisebb közülük. Ekkor a $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$ súlyvektorhoz tartozó OWA operátort így értelmezzük:

$$\mathbf{OWA}_{\vec{w}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \tilde{x}_i.$$

Megjegyzések

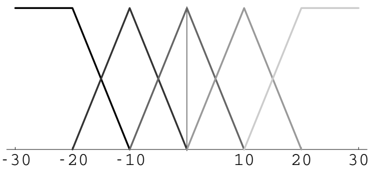
- A hozzárendelési megközelítés a gyakorlatban sokkal gyakoribb, mint a deduktív. Egy ilyen létező csomagban (LFLC) $\tilde{I} = \vec{T}_{\mathbf{L}}$ és $\tilde{T} = T_{\mathbf{M}}$.
- A hozzárendelési megközelítés leggyakoribb változatában $\tilde{T} = T_{\mathbf{M}}$ és $\tilde{A} = S_{\mathbf{M}}$. Az erre épülő fuzzy irányítási rendszer *Mamdani-féle* vagy *max-min* néven ismert.
- Egy másik gyakori variánsban $\tilde{T} = T_{\mathbf{P}}$ és az összeg vagy a számtani közép az $\tilde{A}$ aggregációs operátor. Ez *sum-prod inference* néven ismert.

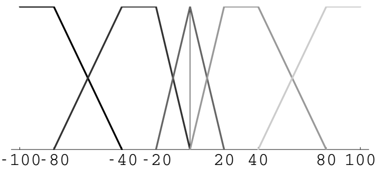
A Mamdani-féle módszer áttekintése



Példa

Az előző példa szabályrendszerét tekintjük.
[vissza a szabályrendszerhez]
A φ és $\dot{\varphi}$ változókra a baloldali, az f-re a jobboldali fuzzy halmazokat definiáljuk:





Mélyebb betekintés

- Mindegyik t_i igazságérték az egységintervallumból való, és az $(x_1, \ldots, x_n)$ input vektortól függ. Vagyis t_i fuzzy halmaz $X_1 \times \cdots \times X_n$-en.

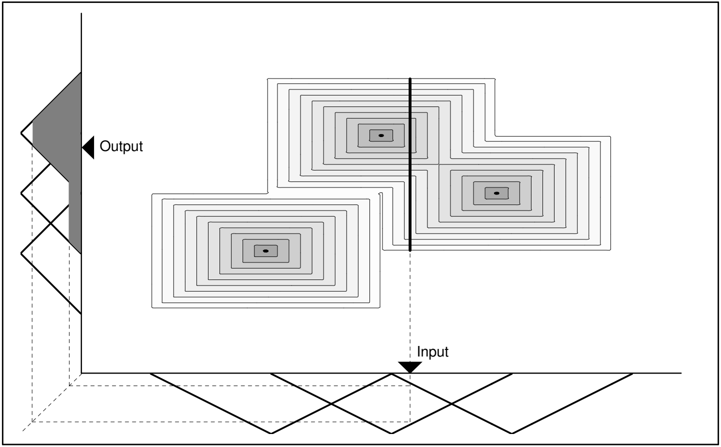
- Egy adott $(x_1, \ldots, x_n)$ input vektor és $y \in X_y$ output érték esetén a kapcsolat foka a szabálybázison keresztül így adható meg:

  $$\tilde{I}\big(t_i(x_1, \ldots, x_n), M(l_j^y)(y)\big) \quad \text{vagy} \quad \tilde{T}\big(t_i(x_1, \ldots, x_n), M(l_j^y)(y)\big).$$

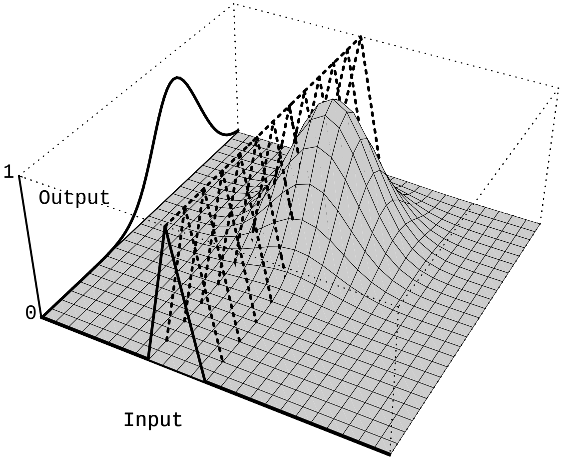
  Ez azt jelenti, hogy mindegyik szabály egy fuzzy relációt definiál $X_1 \times \cdots \times X_n$ és X_y között.

- Hasonlóan, a teljes szabálybázis egy fuzzy relációt definiál $X_1 \times \cdots \times X_n$ és X_y között.

Grafikus reprezentáció



Mit tehetünk fuzzy inputok esetén?



A defuzzifikáló egység

Defuzzifikálás

Sok alkalmazásban az output egy crisp szám kell legyen. Vagyis az $\tilde{O}$ fuzzy halmazból egyetlen számot kell csinálnunk. Ez a defuzzifikálás. Az alábbiak a leggyakoribb eljárások:

Mean of maximum (MOM): Az output annak a területnek a súlypontja, ahol $\tilde{O}$ maximális. Vagyis

$$\xi_{\mathrm{MOM}}(\tilde{O}) := \frac{\displaystyle\int_{\mathrm{Ceil}(\tilde{O})} y \; dy}{\displaystyle\int_{\mathrm{Ceil}(\tilde{O})} 1 \; dy},$$

ahol

$$\mathrm{Ceil}(\tilde{O}) := \{y \in X_y \mid \tilde{O}(y) = \max\{\tilde{O}(z) \mid z \in X_y\}\}$$

Defuzzifikálás (folyt.)

Center of gravity (COG): Az output az $\tilde{O}$ tagsági függvény grafikonja alatti terület súlypontja:

$$\xi_{\mathrm{COG}}(\tilde{O}) := \frac{\int\limits_{X_y} y \cdot \tilde{O}(y)\, dy}{\int\limits_{X_y} \tilde{O}(y)\, dy}$$

Center of area (COA): Az output az a pont, amelynél ha húzunk egy függőleges egyenest, akkor ez az egyenes az $\tilde{O}$ tagsági függvény alatti területet két egyenlő területű részre osztja.

Fuzzy irányítás

Diszkrét idejű zárthurkú (closed-loop) irányítás

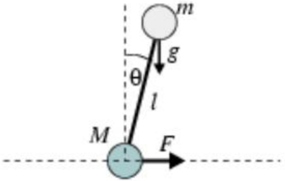
- A valós rendszerek diszkrét időben működnek; legyen két egymást követő mintavételi ciklus közötti idő Δt.
- A dinamikus rendszert egy $(x_1(t), \ldots, x_k(t))$ állapotvektor segítségével írjuk le. Ezt egy f_S függvénnyel modellezzük. Egy új állapotot f_S segítségével számítunk ki a régi állapotból, valamint a kontroll intézkedések/akciók $(u_1(t), \ldots, u_l(t))$ vektorából:

$$\big(x_1(t+\Delta t), \ldots, x_k(t+\Delta t)\big) = f_S\big(x_1(t), \ldots, x_k(t); u_1(t), \ldots, u_l(t)\big).$$

- A vezérlő egy f_C függvény, amely a jelenlegi állapotból kiszámítja a kontroll akciók vektorát:

$$\big(u_1(t), \ldots, u_l(t)\big) = f_C\big(x_1(t), \ldots, x_k(t)\big).$$

Példa: fordított inga szabályozása



- Állapotváltozók: a rúd függőlegessel bezárt szöge (θ) és a közelítő szögsebesség ($\Delta\theta$).
- Az irányítás célja: mindkét értéket nullán tartsuk.
- Akció: a megfelelő F mozgatóerő alkalmazása.

Fuzzy rendszerek az irányításban

Természetesen a fuzzy rendszerek készen állnak az irányításban történő alkalmazásra. Azonban a következőkre tekintettel kell lenni:

- Az f_C függvény simasági tulajdonságai (pl. folytonosság, deriválhatóság).
- Stabilitás.
- Számítási igény (a fuzzy vezérlőket gyakran implementálják korlátozott erőforrású hardveren).

Simaság

- Csak akkor garantálható f_C simasága, ha a tagsági függvények és minden operátor – (T, S, N) és $(\tilde{I}, \tilde{T})$, vagy $(\tilde{T}, \tilde{S})$ – sima.
- 1. példa: folytonos tagsági függvények és folytonos operátorok garantálják, hogy f_C folytonos; jegyezzük meg, hogy a MOM defuzzifikáló módszer NEM folytonos!
- 2. példa: differenciálható tagsági függvények és differenciálható operátorok garantálják, hogy f_C folytonos; ez azt jelenti, hogy a max-min következtetés nem feltétlenül ad differenciálható kontrol függvényt; a sum-prod szabály a COG defuzzifikálással viszont deriválható f_C-t ad (ha a többi említett feltétel is teljesül).

Stabilitás

- A stabilitás nagyjából azt jelenti, hogy van olyan pont, amelynek közeli környezetében a rendszer jól viselkedik.
- Ez speciálisan azt jelenti, hogy nincs szükség korrekcióra ha a rendszer tökéletesen egy ilyen pontban van.
- A stabilitás kérdését nem lehet megválaszolni az explicit modell ismerete nélkül.
- A fuzzy vezérlők stabilitása még mindig nyitott kérdés.

A Mamdani-féle (max-min) irányítás hiányosságai

Bár a gyakorlatban nagyon gyakori és általában elegendő is ennek használata, az eljárásnak vannak hiányosságai:

- Az eredményül kapott f_C kontroll függvénynek ritkán vannak „szép'' tulajdonságai.
- Bizonyos feltételek mellett instabil viselkedés mutatkozhat.
- Az output változókra vonatkozó maximális értékeket legtöbbször nem lehet elérni.

A sum-prod következtetés az első problémát megoldja, de a másik kettőt nem.

Alternatív megközelítés: Sugeno-féle fuzzy rendszerek

A Sugeno-féle fuzzy rendszerek egyszerűsített akciókat használnak:

$$\text{HA } cond_i \text{ AKKOR } N_y = y_i.$$

Legyen $(x_1, \ldots, x_n)$ egy bemeneti vektor, és a $cond_i$ feltétel illeszkedési mértéke $t_i(x_1, \ldots, x_n)$. Ekkor az $f_C(x_1, \ldots, x_n)$ kimenetet az y_i következmény-értékek illeszkedési mértékekkel súlyozott közepeként definiáljuk:

$$f_C(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{m} t_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{m} t_i(x_1, \ldots, x_n)}$$

A Sugeno-féle rendszerek szakaszonként konstans lépcsős függvények, fuzzy lépcsőfokokkal.

Egy variáns: Takagi/Sugeno/Kang-féle (TSK) fuzzy rendszerek

A TSK fuzzy rendszerek által használt kimenetek:

$$\text{HA } cond_i \text{ AKKOR } N_y = f_i(x_1, \ldots, x_n),$$

ahol $f_i(x_1, \ldots, x_n) = a_i^0 + a_i^1 \cdot x_1 + \cdots + a_i^n \cdot x_n$. Legyen $(x_1, \ldots, x_n)$ bemeneti vektor, és a $cond_i$ feltétel illeszkedési mértéke $t_i(x_1, \ldots, x_n)$. Ekkor az $f_C(x_1, \ldots, x_n)$ kimenetet az f_i következmény-értékek illeszkedési mértékekkel súlyozott közepeként definiáljuk:

$$f_C(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{m} t_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot \left(a_i^0 + a_i^1 \cdot x_1 + \cdots + a_i^n \cdot x_n\right)}{\sum_{i=1}^{m} t_i(x_1, \ldots, x_n)}$$

A TSK fuzzy rendszerek ezek szerint szakaszonként lineáris függvények fuzzy átmenetekkel.

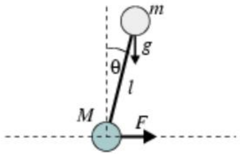
A Sugeno-féle és a TSK fuzzy rendszerek előnyei

- Sokkal kevesebb számítási igény a „következtetés és defuzzifikálás” lépésekben.
- A kontroll függvény szebb analitikus tulajdonságai.
- Az y_i vagy $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ output értékek ekzakt interpolációja elérhető.
- A stabilitás könnyebben garantálható.

Demonstrációs példa: A fordított inga szabályozása

A feladat

- Az irányítás célja egy vizszintes tengellyel rögzített rúd függőleges helyzetben tartása, amit a tengelyt tartó kocsi vizszintes irányú mozgatásával érünk el.



- Egyszerűsített fizikai modell: a rúd aljánál lévő M, és a rúd felső részén lévő m tömegpontból áll. Ezeket egy tömör, elhanyagolható tömegű ℓ hosszúságú rúd köti össze.

A feladat (folyt.)

- Az inga egyensúlyi helyzetben való megtartásához (visszahozatalához) szükséges F erő meghatározására a rúd függőlegessel bezárt θ szögét, és ennek a szögnek a $\Delta\theta$-ból becsült $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ változását (közelítő szögsebességét) mérjük.
- Tehát a rendszer bemenő változói: θ és $\Delta\theta$, ezek értéke a megfigyelés.
- Az irányítás célja, hogy a megfelelő F erővel mindkét (θ és $\Delta\theta$) értéket nullán tartsuk.

Hagyományos szabályozás

- Ez a modell formális, differenciálegyenlet formájában megadott leírására épül. Ennek megoldása adja meg a megfelelő irányítási értéket.
- Az egyenlet (g a gravitációs állandó):

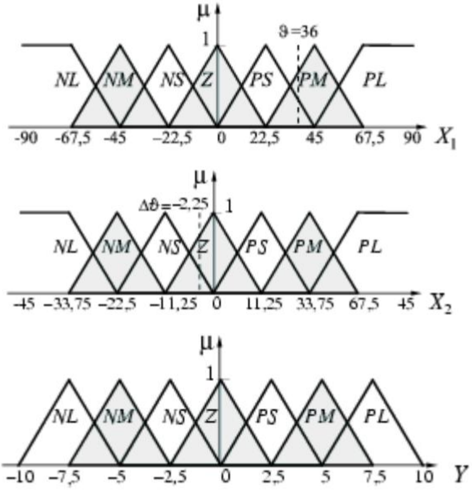
$$(m+M)\cdot\sin^2\theta\cdot\ell\cdot\dot{\theta}+m\cdot\ell\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\theta^2-(m+M)\cdot g\cdot\sin\theta=-F\cdot\cos\theta.$$

- Cél az egyenletből az $F=F(t)$ erőnek a meghatározása úgy, hogy a θ és a $\dot{\theta}$ gyorsan nullához tartson.

A bemeneti és kimeneti alaphalmazok

- A θ szög értéke az $X_1 = [-90, 90]$ tartományban változhat.
- Elméletileg a $\Delta\theta$ szögsebesség bármekkora lehet, de egyrészt szélsőséges értékeket csak mesterségesen idézhetünk elő, másrészt a mérőeszköz is csak egy bizonyos tartományban működik. Ezért feltesszük:
- $\Delta\theta$ értéke az $X_2 = [-45, 45]$ (fok/mp) tartományban változhat.
- Hasonló megfontolások alapján a kimenő változó alaphalmaza $Y = [-10, 10]$ (N).

Az alaphalmazok fuzzy partíciói



A szabályok

- R_i: HA a szög $\theta = A_{i,1}$ és a szögsebesség $\Delta\theta = A_{i,2}$, akkor az erő $F = B_i$.
- „Ha a szög kis negatív és a szögsebesség nagy negatív, akkor az erő legyen kicsi pozitív.”
- HA $\theta = NS$ és $\Delta\theta = NL$, akkor $F = PS$.
- A szabálybázist egy (az alaphalmazok partícióinak megfelelő) 7×7-es táblázatban adjuk meg a következő oldalon.

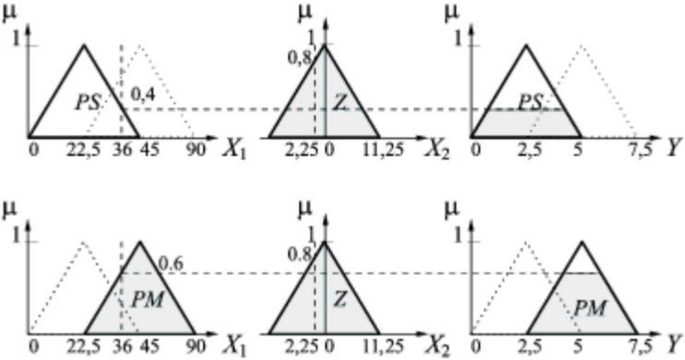
A szabálybázis

θ \ $\Delta\theta$	NL	NM	NS	Z	PS	PM	PL
NL			PS	PL			
NM				PM			
NS	NM		NS	PS			
Z	NL	NM	NS	Z	PS	PM	PL
PS				NS	PS		PM
PM				NM			
PL				NL	NS		

A Mamdani-féle következtetési algoritmus alkalmazása

- Aktuális megfigyelés: $\theta = 36$, $\Delta\theta = -2,25$.
- Két szabály tüzel:
  - R_1: HA $\theta = PS$ és $\Delta\theta = Z$, akkor $F = PS$.
  - R_2: HA $\theta = PM$ és $\Delta\theta = Z$, akkor $F = PM$.
- A súlyfaktorok meghatározása:
  - $w_1 = \min\{0,4; 0,6\} = 0,4$,
  - $w_2 = \min\{0,6; 0,8\} = 0,6$.

Részkonklúziók



A végső következtetés

- A végső következtetés fuzzy halmazát a részkonklúziók uniójaként kapjuk.
- Defuzzifikálással $y = 5$ (MOM), illetve $y = 3,95$ (COG).
- Tehát az inga egyensúlyban tartásához vagy 5 N, vagy 3,95 N erőt kell alkalmaznunk (döntéstől függően).