5. A kiterjesztési elv, nyelvi változók

Gépi intelligencia I.

Fodor János

BMF NIK IMRI

NIMGI1MIEM

Tartalomjegyzék I

1 A kiterjesztési elv

2 Nyelvi változók

A KITERJESZTÉSI ELV

HALMAZ FÜGGVÉNY SZERINTI KÉPE ÉS ŐSKÉPE

Legyen $f : X \to Y$ függvény és A az X részhalmaza. Ekkor az A *halmaz* f *szerinti képét* a következő módon definiáljuk:

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{ van olyan } x \in A, \text{ hogy } y = f(x)\}$$

Legyen B az Y részhalmaza. Ekkor a B *halmaz* f *szerinti ősképét* az alábbi módon értelmezzük:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \text{ van olyan } y \in B, \text{ amelyre } y = f(x)\}.$$

Kérdés: *Hogyan terjeszthetjük ezt ki fuzzy halmazokra?*

A KITERJESZTÉSI ELV

Legyen $f : X \to Y$ adott függvény, és definiáljunk egy R relációt:

$$R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } y = f(x) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Legyen A az X fuzzy részhalmaza, B pedig az Y fuzzy részhalmza. Ekkor $\hat{f}(A) = R_T(A)$, és $\hat{f}^{-1}(B) = R_T^{-1}(B)$, ami a következő alakra egyszerűsödik:

$$\hat{f}(A)(y) = \sup\{A(x) \mid y = f(x)\},$$

$$\hat{f}^{-1}(B)(x) = \sup\{B(y) \mid y = f(x)\}.$$

Reprezentáció α-szinthalmazok segítségével

Legyen $\alpha \in [0, 1[$. Az A fuzzy halmaz *szigorú α-szinthalmaza*

$$[A]^{+\alpha} = \{x \in X \mid A(x) > \alpha\}.$$

Adott $f : X \to Y$ függvény esetén a következő teljesül minden $\alpha \in [0, 1[$ esetén:

$$[\hat{f}(A)]^{+\alpha} = f([A]^{+\alpha}).$$

Példa

$X = \{a, b, c, d, e\}, \; Y = \{r, s, t, u\}$

x	$A(x)$
a	0.6
b	0.4
c	0.1
d	0.0
e	0.3

x	$f(x)$
a	r
b	s
c	r
d	t
e	s

y	$B(y)$
r	0.0
s	0.3
t	0.7
u	0.1

$$\hat{f}(A) = ? \qquad \hat{f}^{-1}(B) = ?$$

A kiterjesztési elv Descartes-szorzatra

Legyen $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ adott függvény, A_i pedig fuzzy halmaz X_i-n (for $i = 1, \ldots, n$). Hogyan értelmezhetjük $\hat{f}(A_1, \ldots, A_n)$-et?

Adott T t-norma esetén az f *függvény T-kiterjesztését* $\hat{f}_T$ jelöli, és ezt így értelmezzük:

$$\hat{f}_T(A_1, \ldots, A_n)(y) = \sup\{\, T(A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)) \mid x_i \in X_i \text{ és } y = f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Reprezentáció α-szinthalmazok segítségével

Az alábbi igaz minden $\alpha \in [0,1[$ esetén:

$$[\hat{f}_{T_{\mathbf{M}}}(A_1, \ldots, A_n)]^{+\alpha} = f([A_1]^{+\alpha}, \ldots, [A_n]^{+\alpha})$$

Jegyezzük meg, hogy $T \neq T_{\mathbf{M}}$ esetén *nem érvényes* ez az egyenlőség!

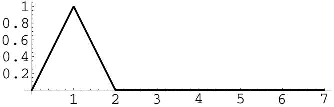
FUZZY ARITMETIKA

Legyenek A_1 és A_2 az $\mathbb{R}$ fuzzy részhalmazai.

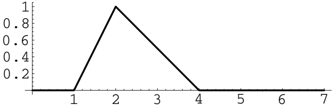
- Az $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ összeadás (összeg) T-kiterjesztését *T-összeadásnak (T-összegnek)* nevezzük. Az alábbi speciális jelölést használjuk:
$$A_1 \oplus_T A_2 = \hat{f}_T(A_1, A_2).$$
- Az $f'(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ szorzás (szorzat) T-kiterjesztését *T-szorzásnak (T-szorzatnak)* nevezzük. Az alábbi speciális jelölést használjuk:
$$A_1 \otimes_T A_2 = \hat{f}'_T(A_1, A_2).$$

Példa: fuzzy számok összeadása

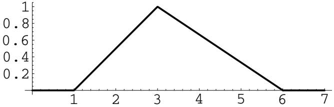
A_1



A_2



$A_1 \oplus_{T_{\mathsf{M}}} A_2$



NYELVI VÁLTOZÓK

Motiváció

Célunk az, hogy fuzzy halmazok segítségével modellezett pontatlan nyelvi kifejezéseket tartalmazó „HA-AKKOR" (IF-THEN) típusú szabályokat tudjunk kezelni, alkalmazni.

Kérdés: *Mi hiányzik még ehhez?*

A nyelvi változók teremtik meg a kapcsolatot a szabályokban található pontatlan nyelvi kifejezések és a fuzzy halmazok között.

Nyelvi változók

Egy *nyelvi változó* az alábbi rendezett ötös

$$V = (N, G, T, X, M),$$

ahol N, T, X, G, és M a következő:

1. N a V nyelvi változó neve
2. G a nyelvtan
3. T az úgynevezett *term halmaz*, azaz a G alapján származtatható nyelvi kifejezések halmaza
4. X az alaphalmaz
5. M egy $T \to \mathcal{F}(X)$ leképezés, amelyik a szemantikát (X egy fuzzy részhalmazát) definiálja minden egyes T-beli nyelvi kifejezésre.

1. példa

1. $N =$ „v1"
2. $G:$

$$\begin{array}{lcl} \perp & := & \langle\text{melléknév}\rangle\ ; \\ \langle\text{melléknév}\rangle & := & \text{„kicsi"} \mid \text{„közepes"} \mid \text{„nagy"}\ ; \end{array}$$

3. $T = \{$„kicsi", „közepes", „nagy"$\}$
4. $X = [0, 100]$
5. $M = \ldots$

2. példa

1. $N =$ „v2”
2. G :

$$
\begin{array}{lcl}
\perp & := & \langle \text{atomi} \rangle \ ; \\
\langle \text{atomi} \rangle & := & \langle \text{melléknév} \rangle \mid \langle \text{határozószó} \rangle \ \langle \text{melléknév} \rangle \ ; \\
\langle \text{melléknév} \rangle & := & \text{„kicsi”} \mid \text{„közepes”} \mid \text{„nagy”} \ ; \\
\langle \text{határozószó} \rangle & := & \text{„lagalább”} \mid \text{„legfeljebb”} \ ;
\end{array}
$$

3. $T = \{$„kicsi”, „közepes”, „nagy”,
„legalább kicsi”, „legalább közepes”,
„legalább nagy”, „legfeljebb kicsi”,
„legfeljebb közepes”, „legfeljebb nagy”$\}$
4. $X = [0, 100]$
5. $M = \ldots$

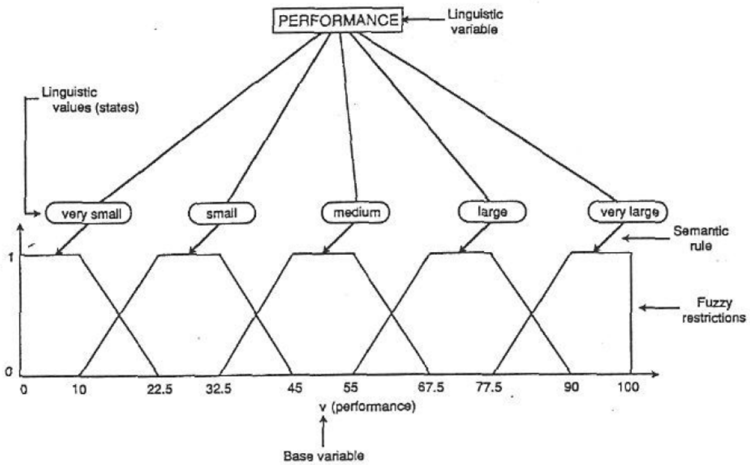
3. példa

1. $N =$ „v3”
2. G :

$$
\begin{array}{lcl}
\perp & := & \langle\text{atomi}\rangle \mid \langle\text{atomi}\rangle\ \langle\text{bináris}\rangle\ \langle\text{atomi}\rangle\ ; \\
\langle\text{atomi}\rangle & := & \langle\text{melléknév}\rangle \mid \langle\text{határozószó}\rangle\ \langle\text{melléknév}\rangle\ ; \\
\langle\text{melléknév}\rangle & := & \text{„nb”} \mid \text{„nm”} \mid \text{„ns”} \mid \text{„z”} \mid \text{„ps”} \mid \text{„pm”} \mid \text{„pb”}; \\
\langle\text{határozószó}\rangle & := & \text{„legalább”} \mid \text{„legfeljebb”}\ ; \\
\langle\text{bináris}\rangle & := & \text{„és”} \mid \text{„vagy”}\ ;
\end{array}
$$

3. $T = \dots$ (462 elem)
4. $X = [-100, 100]$
5. $M = \dots$

4. példa: teljesítmény (performance)



Hogyan értelmezzük M-et?

- Ha T véges (lásd az 1. és 2. példát), $M(a)$-t mindegyik $a \in T$-re külön-külön definiáljuk
- Ha T-nek sok eleme van (lásd a 3. példát), akkor ez fáradságos
- Ha T végtelen, akkor nem is lehetséges.

Gyakorlatban működő módszer

- Mindegyik a atomi melléknévre definiáljunk egy $M(a)$ fuzzy halmazt.
- Használjunk módosítókat a határozószókra.
- Használjuk a fuzzy halmazok közti műveleteket a logikai kötőszavakra.

Egyváltozós rendezés alapú módosítók

$$M(\text{legalább } a)(x) = \sup\{M(a)(y) \mid y \leq x\}$$
$$M(\text{legfeljebb } a)(x) = \sup\{M(a)(y) \mid y \geq x\}$$

Vegyük észre, hogy a szokásos

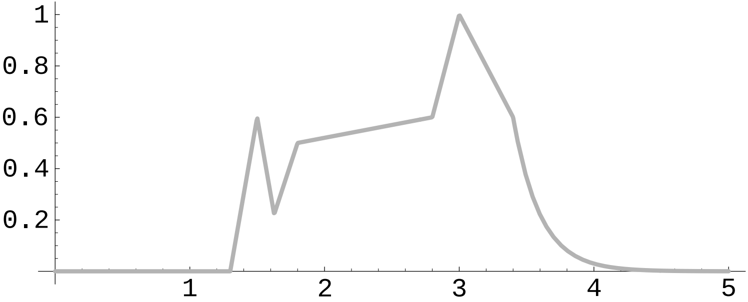
$$\mu_L(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \leq y, \\ 0 & \text{ha } x > y, \end{cases}$$

jelöléssel ez éppen azt jelenti, hogy

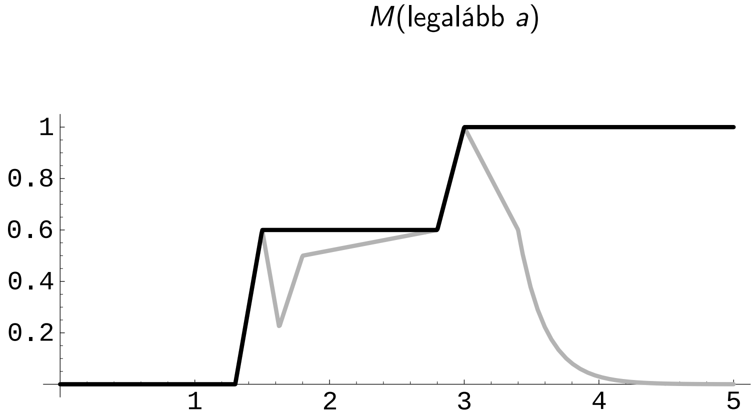
$$M(\text{legalább } a) = L(M(a))$$
$$M(\text{legfeljebb } a) = L^{-1}(M(a)).$$

Példa

$M(a)$

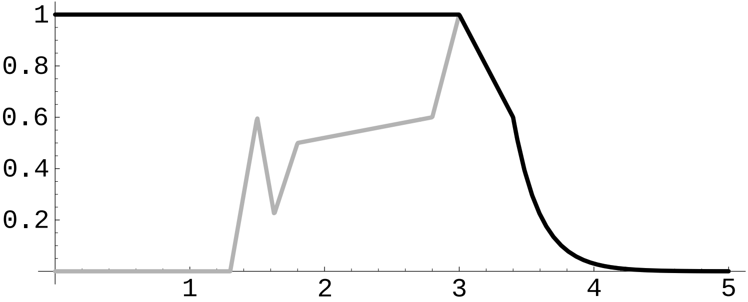


Példa



Példa

$M(\text{legfeljebb } a)$



Logikai kötőszavak

Legyen (T, S, N) De Morgan hármas. Ekkor

$$M(a \text{ és } b) = M(a) \cap_T M(b)$$

$$M(a \text{ vagy } b) = M(a) \cup_S M(b)$$

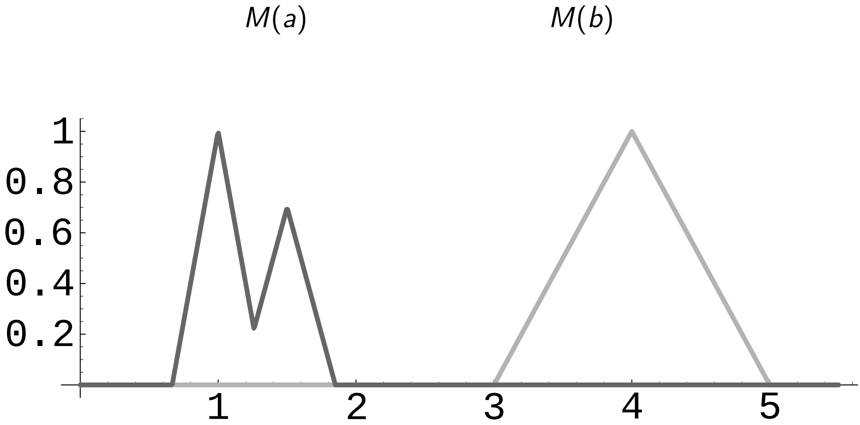
$$M(\text{nem } a) = \complement_N M(a)$$

A „között” módosító

$$M(a \text{ és } b \text{ között}) = M\big(\text{legalább } (a \text{ vagy } b) \text{ és legfeljebb } (a \text{ vagy } b)\big)$$

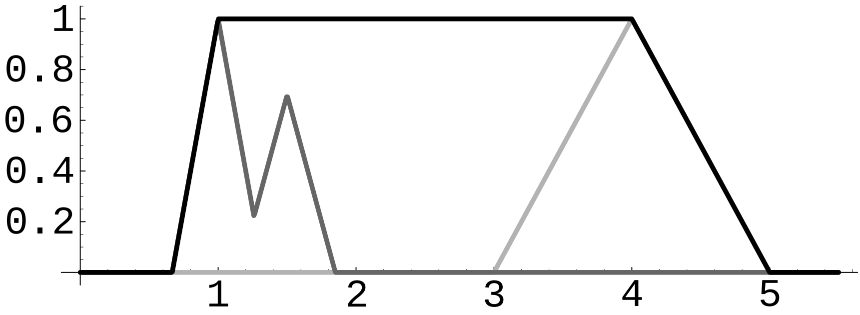
$$= L\big(M(a) \cup_S M(b)\big) \cap_T L^{-1}\big(M(a) \cup_S M(b)\big)$$

Példa



Példa

$M(a \text{ és } b \text{ között})$



Más határozószók?

- Elvben bármilyen más határozószót hozzá adhatunk a G nyelvtanhoz.
- De hogyan értelmezzük az ezeknek megfelelő szemantikát?
- Ismét vagy külön-külön, vagy módosítók segítségével.
- Ismert példák: a fokozó módosító „nagyon” és a gyengítő módosító „többé-kevésbé”

Zadeh-féle megközelítés

$$M(\text{nagyon } a)(x) = \big(M(a)(x)\big)^2$$

$$M(\text{többé-kevésbé } a)(x) = \sqrt{M(a)(x)}$$

Ez a megközelítés túlságosan egyszerűsít.

De Cock-féle megközelítés - egy példa