4. Fuzzy relációk

Gépi intelligencia I.

Fodor János

BMF NIK IMRI

NIMGI1MIEM

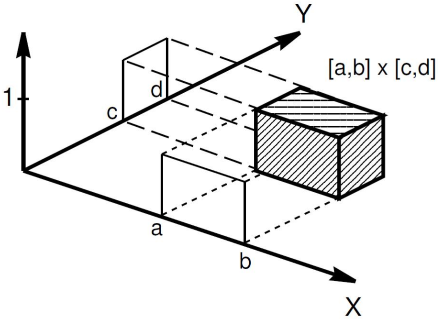
Tartalomjegyzék I

KLASSZIKUS RELÁCIÓK

Definíció

Legyenek A és B halmazok. Ezek $A \times B$-vel jelölt Descartes-szorzatán az összes olyan (a, b) rendezett párból álló halmazt értjük, amelyre $a \in A$ és $b \in B$:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ és } b \in B\}.$$



Definíció

Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ véges sok halmaz ($n \in \mathbb{N}$). Ezek Descartes-szorzatát $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ jelöli. Ez az összes olyan $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ rendezett szám n-esből áll, amelyre $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $\ldots$, $x_n \in X_n$.

Ha $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, akkor Descartes-szorzatukat X^n jelöli.

Definíció

Legyenek A és B halmazok. Egy az A és B közti reláció nem más, mint az $A \times B$ egy R részhalmaza. Ekkor R-et bináris relációnak hívjuk.

- Amennyiben $a \in A$ és $b \in B$ relációban állnak, ezt így jelöljük: $(a, b) \in R$, vagy aRb.
- Mivel $R \subseteq A \times B$ halmaz, ezért karakterisztikus függvényét is használhatjuk:

$$\chi_R(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (a, b) \in R, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Definíció

Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ véges sok halmaz. Egy az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ közti reláció nem más, mint az $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ egy R részhalmaza. Ekkor R-et n-dimenziós relációnak nevezzük.

- Amennyiben $x_1 \in X_1$, ..., $x_n \in X_n$ relációban állnak, ezt így jelöljük: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$.
- Mivel $R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ halmaz, ezért most is használhatjuk karakterisztikus függvényét:

$$\chi_R(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{ha } (x_1, \ldots, x_n) \in R, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

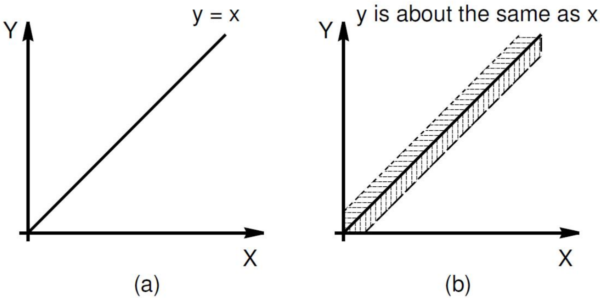
FUZZY RELÁCIÓK

Definíció

Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ véges sok halmaz. Egy az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ közti fuzzy reláció nem más, mint az $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ egy fuzzy részhalmaza.

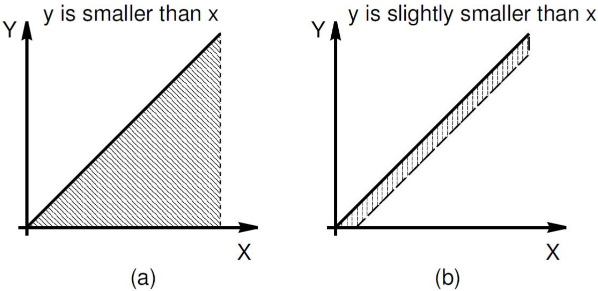
- Eddigi szokásainknak megfelelően egy fuzzy relációt és annak tagsági függvényét ugyanazzal a szimbólummal jelöljük.
- Egy az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ közti R fuzzy reláció bármely $[R]_\alpha$ szinthalmaza klasszikus reláció ugyanazon halmazok között.

Példa



(a) Az „$y = x$” klasszikus reláció. (b) Az „y nagyjából egyenlő x-szel” fuzzy reláció.

Példa



(a) Az „$y < x$” klasszikus reláció. (b) Az „y kicsit kisebb, mint x” fuzzy reláció.

Legyen $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ véges halmaz, és R egy bináris fuzzy reláció $X \times Y$-on. Ekkor R reprezentálható egy $(r_{ij})_{n \times m}$ tagsági mátrix segítségével, ahol

$$r_{ij} = R(x_i, y_j)$$

minden i és j esetén ($i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$).

Például, ha $X = \{\text{Budapest, Sydney, London}\}$ és $Y = \{\text{Hongkong, Budapest}\}$, és $R \subseteq X \times Y$ fuzzy reláció jelentése: „nagyon távol fekszik”, akkor az ezt reprezentáló mátrix az alábbi:

$$R = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.5 & 1 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Projekció és hengeres kiterjesztés

A projekció és a hengeres kiterjesztés fuzzy relációkon értelmezett műveletek. Ezek fontos szerepet játszanak a fuzzy szabályalapú irányítási rendszereknél.

Tekintsük az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ halmazok Descartes-szorzatát, és legyen $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ennek egy eleme. Legyen $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, és tekintsük a J-beli j indexeknek megfelelő X_j halmazok Descartes-szorzatát:

$$Y_J := \times_{j \in J} X_j.$$

Például, ha $n = 4$, és $J = \{1, 4\}$, akkor $Y_J = X_1 \times X_4$.

Projekció

Jelölje J elemszámát r. Egy $\underline{y} \in Y_J$ vektort az $\underline{x} \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ részvektorának nevezünk, ha $y_j = x_j$ minden $j \in J$ esetén. Ezt a tényt az $\underline{y} \prec \underline{x}$ szimbólummal jelöljük.

Az előző példa esetén $\underline{y} = (x_1, x_4)$ részvektora $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$-nek. Az $\underline{y}$ úgy kapható meg, hogy az $\underline{x}$ minden olyan indexű komponensét töröljük, amely nincs J-ben.

Definíció

Legyen R az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ halmazok közti fuzzy reláció, $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, és jelöljük Y_J-t egyszerűen Y-nal. Jelölje $[R \downarrow Y]$ az R reláció projekcióját Y-ra, amelynek tagsági függvényét az alábbi módon definiáljuk:

$$[R \downarrow Y](\underline{y}) := \max_{\underline{y} \prec \underline{x}} R(\underline{x}), \quad \underline{y} \in Y.$$

Példa

Legyen $X_1 = \{A, B\}$, $X_2 = \{A, B\}$, és $X_3 = \{A, B, C\}$, és az ezek közötti R reláció az alábbi táblázatban adott:

A	A	A	0,1
A	A	B	0,2
A	A	C	0,3
A	B	A	0,4
A	B	B	0,5
A	B	C	0,6
B	A	A	0,7
B	A	B	0,8
B	A	C	0,9
B	B	A	1,0
B	B	B	0,0
B	B	C	0,5

Példa

(folyt.)

Legyen $J = \{1, 2\}$, ekkor $Y_J = X_1 \times X_2$. Jelöljük a fenti R projekcióját Y-ra R_{12}-vel. Ekkor

- $R_{12}(A, A)$ értékét az $R(A, A, A)$, $R(A, A, B)$ és $R(A, A, C)$ értékek maximuma adja. Vagyis $R_{12}(A, A) = \max(0.4, 0.9, 0.2) = 0.9$;
- $R_{12}(A, B)$ értékét az $R(A, B, A)$, $R(A, B, B)$ és $R(A, B, C)$ értékek maximuma adja. Vagyis $R_{12}(A, B) = \max(1, 0, 0.8) = 1$;
- $R_{12}(B, A)$ értékét az $R(B, A, A)$, $R(B, A, B)$ és $R(B, A, C)$ értékek maximuma adja. Vagyis $R_{12}(B, A) = \max(0.5, 0.3, 0.1) = 0.5$;
- $R_{12}(B, B)$ értékét az $R(B, B, A)$, $R(B, B, B)$ és $R(B, B, C)$ értékek maximuma adja. Vagyis $R_{12}(B, B) = \max(0, 0.5, 1) = 1$.

Hengeres kiterjesztés

Most azt vizsgáljuk, hogy ha ismerünk egy fuzzy relációt Y_J-n, azt hogyan terjeszthetjük ki az összes halmaz Descartes-szorzatára.

Definíció

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ halmazok, $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, és jelöljük Y_J-t egyszerűen Y-nal. Legyen R fuzzy reláció a J indexhalmaznak megfelelő X_j halmazok között. Ekkor az R fuzzy reláció $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ Descartes-szorzatra való hengeres kiterjesztésén azt az $[R \uparrow X \setminus Y]$ relációt értjük, amelynek tagsági függvényét az alábbi módon értelmezzük:

$$[R \uparrow X \setminus Y](\underline{x}) := R(\underline{y}), \quad \text{minden olyan } \underline{x}\text{-re, amelyre } \underline{y} \prec \underline{x}.$$

A hengeres kiterjesztés a legnagyobb olyan fuzzy relációt eredményezi, amelyik kompatibilis az adott projekcióval. Egyúttal ez a hengeres kiterjesztés a legkevésbé specifikus reláció az adott projekcióval kompatibilisek között.

Példa

A projekció illusztrálására bemutatott példából indulunk ki. Ott kiszámítottuk az R_{12} relációt. Nézzük most meg, hogy mi lesz R_{12} hengeres kiterjesztése. Egyszerűen csak $[R\uparrow]$-t írunk:

- $[R\uparrow](A,A,A) = [R\uparrow](A,A,B) = [R\uparrow](A,A,C) = R_{12}(A,A) = 0.9$
- $[R\uparrow](A,B,A) = [R\uparrow](A,B,B) = [R\uparrow](A,B,C) = R_{12}(A,B) = 1$
- $[R\uparrow](B,A,A) = [R\uparrow](B,A,B) = [R\uparrow](B,A,C) = R_{12}(B,A) = 0.5$
- $[R\uparrow](B,B,A) = [R\uparrow](B,B,B) = [R\uparrow](B,B,C) = R_{12}(B,B) = 1$

Ha összehasonlítjuk az $[R\uparrow]$ relációt az eredeti R relációval, akkor látható, hogy ezek különböznek egymástól. Ez azt jelenti, hogy információt vesztünk akkor, amikor a projekciókat képezzük.

BINÁRIS FUZZY RELÁCIÓK

A bináris (vagyis 2 dimenziós) relációk megkülönböztetett jelentőségűek, hiszen bizonyos értelemben a függvény fogalmának kiterjesztését jelentik.

Legyen X és Y adott halmaz, R pedig fuzzy reláció X és Y között (vagyis $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$).

- R értelmezési tartománya (domain) az X azon $\mathrm{dom}\ R$-rel jelölt fuzzy részhalmaza, amelynek tagsági függvénye az alábbi módon értelmezett:

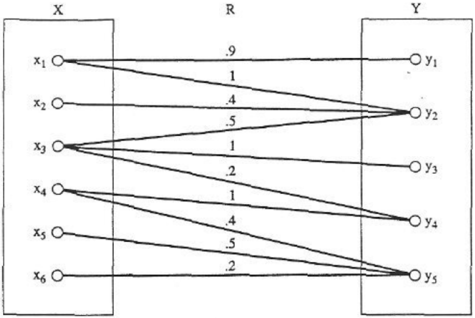
$$\mathrm{dom}\ R(x) := \max_{y \in Y} R(x, y) \quad (x \in X).$$

- R értékkészlete (range) az Y azon $\mathrm{ran}\ R$-rel jelölt fuzzy részhalmaza, amelynek tagsági függvénye az alábbi módon értelmezett:

$$\mathrm{ran}\ R(y) := \max_{x \in X} R(x, y) \quad (y \in Y).$$

- R inverze az az R^{-1}-gyel jelölt fuzzy reláció, amely Y és X közötti, és amelyre $R^{-1}(y, x) := R(x, y)$.

Véges X és Y halmazok esetén egy X és Y közötti R fuzzy reláció vagy tagsági mátrixként, vagy páros gráfként is reprezentálható.



(a)

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 1 & .2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & .4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .2 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b)

- A véges esetben az R inverzét reprezentáló tagsági mátrix az R tagsági mátrixának a transzponáltja lesz (sorok és oszlopok felcserélődnek).
- Minden R bináris fuzzy relációra igaz, hogy $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.

Bináris fuzzy relációk kompozíciója

Legyenek $P \subset X \times Y$ és $Q \subset Y \times Z$ hagyományos relációk. Ezek $P \circ Q$-val jelölt kompozíciója az az $R \subset X \times Z$ klasszikus reláció, amely az alábbi módon értelmezett:

$$xRz = x(P \circ Q)z \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ha van olyan } y \in Y \ : \ xPy \text{ és } yQz.$$

Definíció

Legyenek most $P \in \mathcal{F}(X \times Y)$ és $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ bináris fuzzy relációk. Ezek standard kompozíciója az az $R = P \circ Q$ bináris fuzzy reláció X és Z között, amelynek tagsági függvénye az alábbi módon értelmezett:

$$R(x,z) = \max_{y \in Y} \min(P(x,y), Q(y,z)), \quad x \in X, \ z \in Z.$$

- Ha Y nem véges, akkor valójában sup veendő max helyett.
- Azért hívják standard kompozíciónak, mert a standard t-norma és t-konorma szerepel benne.
- A standard kompozíció asszociatív.
- A kompozíció inverze egyenlő az inverzek fordított kompozíciójával: $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$.
- A standard kompozíció nem kommutatív.

Bináris fuzzy relációk kompozícióját könnyen kiszámíthatjuk akkor, amikor az alaphalmazok végesek. Legyen $P = [p_{ik}]$, $Q = [q_{kj}]$ és $R = [r_{ij}]$ a tagsági mátrixok, ahol $R = P \circ Q$. Ekkor azt írhatjuk, hogy

$$[r_{ij}] = [p_{ik}] \circ [q_{kj}],$$

ahol

$$r_{ij} = \max_k \min(p_{ik}, q_{kj}).$$

Vegyük észre, hogy ez a mátrixok szokásos szorzásához hasonlóan működik. Az eltérés annyi, hogy a szorzatot a minimum, az összeget pedig a maximum helyettesíti.

Illusztráció

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}7 \\ 1 & 0 & 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$

ahol például az r_{11} és r_{32} értékét az alábbi módon számítjuk ki:

$$\begin{aligned} r_{11} = 0{,}4 &= \max\left[\min\left(0{,}2,\ 0{,}6\right), \min\left(0{,}4,\ 0{,}5\right), \min\left(0{,}5,\ 0,0\right), \min\left(0{,}3,\ 0{,}8\right)\right] \\ &= \max\left[\min\left(p_{11}, q_{11}\right), \min\left(p_{12}, q_{21}\right), \min\left(p_{13}, q_{31}\right), \min\left(p_{14}, q_{41}\right)\right] \\ r_{32} = 0{,}9 &= \max\left[\min\left(1,0,\ 0{,}3\right), \min\left(0,0,\ 0{,}1\right), \min\left(0{,}2,\ 0{,}4\right), \min\left(0{,}9,\ 1,0\right)\right] \\ &= \max\left[\min\left(p_{31}, q_{12}\right), \min\left(p_{32}, q_{22}\right), \min\left(p_{33}, q_{32}\right), \min\left(p_{34}, q_{42}\right)\right]. \end{aligned}$$

Halmazműveletek fuzzy relációkon

Legyenek R és Q fuzzy relációk X és Y között, és legyen (T, S, N) egy De Morgan hármas.

T-metszet $R \cap_T Q$: $R \cap_T Q(x, y) = T\big(R(x, y), Q(x, y)\big)$

S-unió $R \cup_S Q$: $R \cup_S S(x, y) = S\big(R(x, y), Q(x, y)\big)$

N-komplementer $\complement_N R$: $\complement_N R(x, y) = N\big(R(x, y)\big)$

Részreláció: $R \subseteq Q$ pontosan akkor, ha $R(x, y) \leq Q(x, y)$ minden $(x, y) \in X \times Y$ esetén

Inverz reláció: $R^{-1}(x, y) = R(y, x)$

Fuzzy relációk T-kompozíciója

Legyen R fuzzy reláció X és Y között, Q fuzzy reláció Y és Z között. Ezek *T-kompozíciója* az alábbi X és Z közötti $R \circ_T Q$ fuzzy reláció:

$$R \circ_T Q(x, y) = \sup\{T\big(R(x, y), Q(y, z)\big) \mid y \in Y\}$$

Véges alaphalmazok esetén ez is hasonló a mátrixok szorzásához: most szorzás helyett T, összeadás helyett a maximum szerepel.

Példa

$X = \{a, b, c\}$, $Y = \{r, s, t, u\}$, $Z = \{x, y\}$

R	r	s	t	u
a	1.0	0.2	0.9	0.2
b	0.8	1.0	0.0	0.2
c	0.0	0.3	0.2	0.9

Q	x	y
r	0.3	0.4
s	1.0	0.6
t	0.9	0.8
u	0.3	1.0

$R \circ_{T_\mathbf{M}} Q = ?$ $\qquad$ $R \circ_{T_\mathbf{L}} Q = ?$

Bináris fuzzy relációk tulajdonságai

Bináris fuzzy relációk tulajdonságai

Reflexivitás: $R(x,x) = 1$ minden $x \in X$ esetén.

Irreflexivitás: $R(x,x) = 0$ minden $x \in X$ esetén.

Szimmetria: $R(x,y) = R(y,x)$ minden $x,y \in X$ esetén.

T-aszimmetria: $T(R(x,y), R(y,x)) = 0$ minden $x,y \in X$ esetén.

T-tranzitivitás: $T(R(x,y), R(y,z)) \leq R(x,z)$ minden $x,y,z \in X$ esetén.

S-teljesség: $S(R(x,y), R(y,x)) = 1$ minden $x,y \in X$ esetén.

Erős teljesség: $\max(R(x,y), R(y,x)) = 1$ minden $x,y \in X$ esetén.

Példa: „hasonló”

$X = Y = \{1, \ldots, 8\}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.5	1.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.5	1.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.5	1.0	0.5	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	0.5	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	0.5	0.0
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	0.5
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0

Mely tulajdonságok érvényesek erre a fuzzy relációra?

Speciális bináris fuzzy relációk

T-előrendezés:
reflexív és T-tranzitív

Gyenge T-rendezés:
reflexív, T-tranzitív, és erősen teljes

T-ekvivalencia reláció:
reflexív, szimmetrikus, és T-tranzitív

Szigorú T-rendezés:
irreflexív, T-aszimmetrikus, és T-tranzitív

FUZZY HALMAZ FUZZY RELÁCIÓ SZERINTI KÉPE ÉS ŐSKÉPE

Halmaz reláció szerinti képe és ősképe

Halmaz függvény szerinti képe és ősképe

Legyen $f : X \to Y$ függvény és A az X részhalmaza. Ekkor az *A halmaz f szerinti képét* a következő módon definiáljuk:

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{ van olyan } x \in A, \text{ hogy } y = f(x)\}$$

Legyen B az Y részhalmaza. Ekkor a *B halmaz f szerinti ősképét* az alábbi módon értelmezzük:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \text{ van olyan } y \in B, \text{ amelyre } y = f(x)\}.$$

Halmaz reláció szerinti képe és ősképe

Legyen R egy reláció X és Y között, és A az X részhalmaza. Ekkor az A *halmaz* R *szerinti képét* a következő módon definiáljuk:

$$R(A) = \{y \in Y \mid \text{ van olyan } x \in A, \text{ hogy } (x, y) \in R\}$$

Legyen B az Y részhalmaza. Ekkor a B *halmaz* R *szerinti ősképét* az alábbi módon értelmezzük:

$$R^{-1}(B) = \{x \in X \mid \text{ van olyan } y \in B, \text{ amelyre } (x, y) \in R\}.$$

Példa

$X = \{a, b, c\}$, $Y = \{r, s, t, u\}$, $A = \{a, b\}$, $B = \{r\}$

R	r	s	t	u
a	1	0	1	0
b	1	1	0	0
c	0	0	0	1

$$R(A) =? \qquad R^{-1}(B) =?$$

Általános módszer $R(A)$ kiszámítására

Legyen R reláció X és Y között, A pedig X részhalmaza.

1. **Hengeres kiterjesztés:** Definiáljuk az X és Y közötti R' relációt így:

$$R' = \{(x, y) \mid x \in A\};$$

2. **Metszet:** Számítsuk ki az $R'' = R \cap R'$ relációt;
3. R'' **projekciója** Y**-ra:** Definiáljunk egy B halmazt:

$$B = \{y \in Y \mid \text{ van olyan } x \in X, \text{ amelyre } (x, y) \in R''\}.$$

Az így meghatározott B halmaz pontosan $R(A)$-val egyenlő.

Általános módszer $R^{-1}(B)$ kiszámítására

Legyen R reláció X és Y között, B pedig Y egy részhalmaza.

1. **Hengeres kiterjesztés:** Definiáljuk az X és Y közötti R' relációt így:

$$R' = \{(x, y) \mid y \in B\};$$

2. **Metszet:** Számítsuk ki az $R'' = R \cap R'$ relációt;
3. R'' **projekciója** X**-re:** Definiáljunk egy A halmazt:

$$A = \{x \in X \mid \text{ van olyan } y \in Y, \text{ amelyre } (x, y) \in R''\}.$$

Az így meghatározott A halmaz pontosan $R^{-1}(B)$-vel egyenlő.

Példa

$X = Y = \{1, \ldots, 8\}$, $A = \{4, 5, 7\}$

R	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	1

$$R(A) = ?$$

1. lépés: Hengeres kiterjesztés (R')

$A = \{4, 5, 7\}$

R'	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0

2. lépés: Metszet ($R'' = R \cap R'$)

R	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	1

R'	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0

3. lépés: R'' projekciója Y-ra

R''	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0

$$R(A) = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

Fuzzy halmaz fuzzy reláció szerinti képe és ősképe

Fuzzy halmaz fuzzy reláció szerinti képe és ősképe

Legyen R fuzzy reláció X és Y között, A pedig az X egy fuzzy részhalmaza. Ekkor az *A fuzzy halmaz R szerinti T-képét* így definiáljuk:

$$R_T(A)(y) = \sup\{T(A(x), R(x, y)) \mid x \in X\}.$$

Legyen B az Y egy fuzzy részhalmaza. Ekkor a *B fuzzy halmaz R szerinti T-ősképét* így értelmezzük:

$$R_T^{-1}(B)(x) = \sup\{T(R(x, y), B(y)) \mid y \in Y\}.$$

Általános módszer $R_T(A)$ kiszámítására

Legyen R fuzzy reláció X és Y között, A pedig az X egy fuzzy részhalmaza.

1. **Hengeres kiterjesztés:** Definiáljunk egy az X és Y közötti R' fuzzy relációt:
$$R'(x, y) = A(x);$$
2. **Metszet:** Számítsuk ki az $R'' = R \cap_T R'$ fuzzy relációt;
3. R'' **projekciója** Y**-ra:** Definiáljunk egy B fuzzy halmazt így:
$$B(y) = \sup\{R''(x, y) \mid x \in X\}$$

Az így kapott B fuzzy halmaz egyenlő $R_T(A)$-val.

Általános módszer $R_T^{-1}(B)$ kiszámítására

Legyen R fuzzy reláció X és Y között, B pedig az Y egy fuzzy részhalmaza.

1. **Hengeres kiterjesztés:** Definiáljunk egy az X és Y közötti R' fuzzy relációt:
$$R'(x,y) = B(y);$$
2. **Metszet:** Számítsuk ki az $R'' = R \cap_T R'$ fuzzy relációt;
3. R'' **projekciója** X**-re:** Definiáljunk egy A fuzzy halmazt így:
$$A(x) = \sup\{R''(x,y) \mid y \in Y\}.$$

Az így kapott A fuzzy halmaz egyenlő $R_T^{-1}(B)$-vel.

 Fuzzy halmaz fuzzy reláció szerinti képe és őseképe

Példa

$$X = \{a, b, c\},\ Y = \{r, s, t, u\}$$

R	r	s	t	u
a	1.0	0.2	0.9	0.2
b	0.8	1.0	0.0	0.2
c	0.0	0.3	0.2	0.9

x	$A(x)$
a	1.0
b	0.4
c	0.0

y	$B(y)$
r	0.0
s	0.3
t	0.7
u	0.1

$$R_{T_{\mathbf{L}}}(A) = ? \qquad R^{-1}_{T_{\mathbf{L}}}(B) = ?$$

 Fuzzy halmaz fuzzy reláció szerinti képe és ősképe

Példa

$X = Y = \{1, \ldots, 8\}$

R	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	1.0	1.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	1.0
4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

x	$A(x)$
1	0.0
2	0.4
3	1.0
4	0.5
5	0.0
6	0.0
7	0.0
8	0.0

$$R_{T_M}(A) = ?$$

1. lépés: Hengeres kiterjesztés (R')

x	$A(x)$
1	0.0
2	0.4
3	1.0
4	0.5
5	0.0
6	0.0
7	0.0
8	0.0

R'	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

2. lépés: Metszet ($R'' = R \cap_{T_M} R'$)

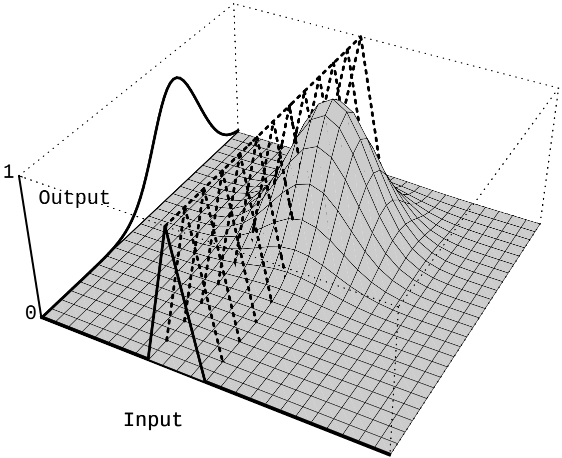
R''	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.4	0.4	0.4	0.4
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	1.0
4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.5
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

3. lépés: R'' projekciója Y-ra

R''	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.4	0.4	0.4	0.4
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	1.0
4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.5
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

x	$R_{T_M}(A)(x)$
1	0.0
2	0.0
3	0.0
4	0.0
5	0.4
6	0.5
7	1.0
8	1.0

$R_T(A)$ grafikus reprezentációja



Példa: X végtelen

$$X = \mathbb{R}$$

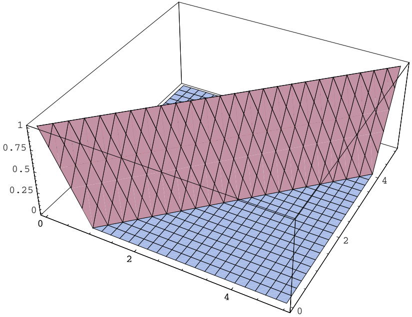
$$E(x, y) = \max(1 - |x - y|, 0)$$

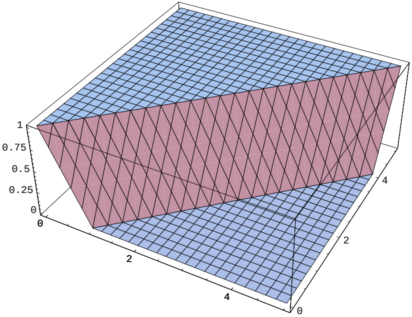
$$L(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \leq y \\ \max(1 - x + y, 0) & \text{egyébként} \end{cases}$$

E egy $T_{\mathbf{L}}$-ekvivalencia reláció;

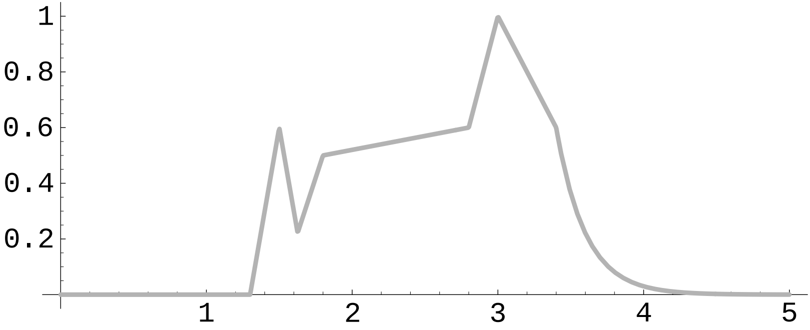
L egy $T_{\mathbf{L}}$-E-rendezés: $T_{\mathbf{L}}$-tranzitív, E-reflexív $(E(x, y) \leq L(x, y))$, és $T_{\mathbf{L}}$-E antiszimmetrikus $(T(L(x, y), L(y, x)) \leq E(x, y))$

E és L grafikus reprezentációja



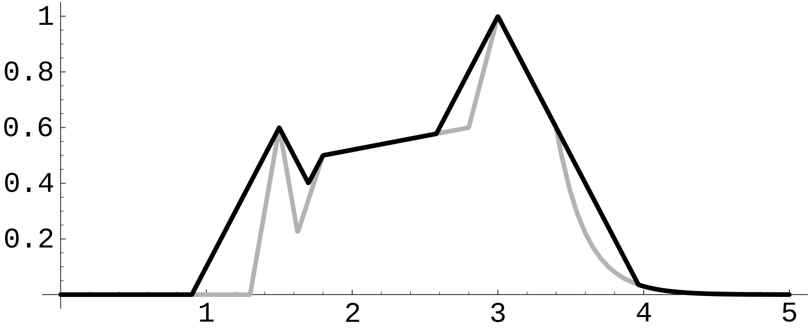


Példa: az A fuzzy halmaz



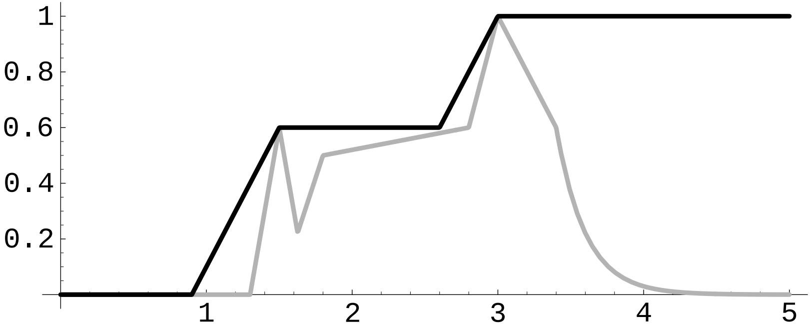
Fuzzy halmaz fuzzy reláció szerinti képe és ősképe

Példa: $E_{T_{\mathbf{L}}}(A)$



Fuzzy halmaz fuzzy reláció szerinti képe és ősképe

Példa: $L_{T_{\mathbf{L}}}(A)$



Példa: $L_{T_{\mathbf{L}}}^{-1}(A)$