3. Fuzzy aritmetika

Gépi intelligencia I.

Fodor János

BMF NIK IMRI

NIMGI1MIEM

Tartalomjegyzék I

INTERVALLUM-ARITMETIKA

- Tekintsünk két olyan X, Y mennyiséget, amelyek pontos értékét nem ismerjük. A rendelkezésre álló információ alapján mindössze annyit tudunk, hogy X ismeretlen értéke valahol az $[\underline{a}, \overline{a}]$ intervallumban, míg Y ismeretlen értéke valahol a $[\underline{b}, \overline{b}]$ intervallumban van.
- Mit mondhatunk most $X + Y$ értékéről? Másképpen: mi a legkisebb és legnagyobb értéke $X + Y$-nak a rendelkezésre álló információ alapján?
- $X + Y$ nyilván csak olyan $(x + y)$ értékeket vehet fel, amelyekre $x \in [\underline{a}, \overline{a}]$ és $y \in [\underline{b}, \overline{b}]$. Az $(x + y)$ legkisebb lehetséges ilyen értéke nyilván $\underline{a} + \underline{b}$, és a legnagyobb $\overline{a} + \overline{b}$.
- Ezért $X + Y$ értéke valahol az $[\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$ intervallumban fekszik.
- Ezt az alábbi módon is megfogalmazhatjuk: az $[\underline{a}, \overline{a}]$ és $[\underline{b}, \overline{b}]$ intervallumok összege az $[\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$ intervallum.

DEFINÍCIÓ

Legyenek $I_a = [\underline{a}, \overline{a}]$ és $I_b = [\underline{b}, \overline{b}]$ valós intervallumok, és $\circ$ a valós számokon értelmezett négy alapművelet (összeadás $(+)$, kivonás $(-)$, szorzás $(\cdot)$ és osztás $(/)$,) valamelyike. Ezt kiterjeszthetjük intervallumok között végzett megfelelő aritmetikai műveletté az alábbi módon:

$$I_a \circ I_b := \{x \circ y \mid x \in I_a, y \in I_b\},$$

ahol az osztás esetén feltesszük, hogy $0 \notin I_b$.

Nyilvánvaló, hogy a műveletek eredménye szintén valós intervallum. Ennek kiszámításához elegendő az I_a és I_b végpontjait használnunk. Az következő szabályok érvényesek:

A négy alapművelet intervallumokon

$$\begin{aligned}
I_a + I_b &= [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]\ , \\
I_a - I_b &= [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}]\ , \\
I_a \cdot I_b &= [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}]\ , \\
I_a / I_b &= [\underline{a}, \overline{a}] \cdot [1/\overline{b}, 1/\underline{b}]\ .
\end{aligned}$$

Legyen $I_a = [1, 2]$ és $I_b = [2.5, 4]$. Ekkor az előző képletek alapján az alábbi eredményeket kapjuk:

$$I_a + I_b = [3.5, 6], \quad I_b - I_a = [0.5, 3], \quad I_a \cdot I_b = [2.5, 8], \quad I_b / I_a = [1.25, 4]\ .$$

Megjegyzések

- Ha $\underline{a} = \overline{a} = a$, akkor az I_a intervallum degenerált, és az a valós számra redukálódik. Így a fenti intervallum-aritmetika valóban kiterjesztése a klasszikus aritmetikai műveleteknek. Vannak azonban lényeges eltérések.
- Nemdegenerált I_a intervallumoknak nem feltétlenül létezik inverzük az összeadásra, illetve a szorzásra nézve. Például, $-[-1, 1]$ nem az ellentetje (az összeadásra vonatkozó inverze) az $[-1, 1]$ intervallumnak. Valóban, $-[-1, 1] + [-1, 1] = [-2, 2]$, míg az összeadás neutrális eleme a degenerált $[0, 0]$ intervallum (azaz a 0 valós szám).

Megjegyzések
(folyt.)

- Tekintsük az $I_a = [\underline{a}, \overline{a}]$ intervallumot. Ekkor $I_a - I_a = [\underline{a} - \overline{a}, \overline{a} - \underline{a}]$, ezért $I_a - I_a \neq 0$, kivéve ha I_a degenerált intervallum (vagyis valós szám). Mindössze annyit mondhatunk, hogy $0 \in I_a - I_a$.
- Intervallumok esetén nem teljesül a disztributivitás sem. Legyen $I_a = [1, 2]$, $I_b = [2, 3]$, és $I_c = [-2, 5]$. Ekkor

$$I_a \cdot (I_b + I_c) = [0, 16] \neq I_a \cdot I_b + I_a \cdot I_c = [-2, 16] \, .$$

- Általában is igaz, hogy $I_a \cdot (I_b + I_c) \subseteq I_a \cdot I_b + I_a \cdot I_c$.
- Bár a számolás egyszerű intervallumokkal, de az eredményül kapott intervallum túl szélessé válhat. Emiatt a gyakorlatban az eredmények akár használhatatlanok is lehetnek. Ennek elkerülése érdekében az alábbi két egyszerű szabályra érdemes figyelni.

Egy tétel és következménye

Tétel

(i) Két aritmetikai kifejezés, amelyik egymással ekvivalens valós számok esetén, szintén ekvivalens marad az intervallum-aritmetikában akkor, ha mindegyik intervallum csak egyszer szerepel a kifejezésekben.

(ii) Amennyiben a valós számok esetén ekvivalanes két aritmetikai kifejezés egyikében nem ismétlődnek a paraméterek, úgy annak értéke az intervallum-aritmetikában részhalmaza lesz a másik kifejezés értékének.

Gyakorlati szabály

Az intervallum-aritmetika alkalmazása előtt a szóban forgó kifejezést egyszerűsíteni kell azért, hogy a paraméterek többszöri előfordulását lehetőleg elkerüljük.

Megjegyzések

- Bármilyen széles is az eredményül kapott intervallum, biztosan tartalmazza a valódi (de ismeretlen) értéket.
- Amikor nincsenek ismétlődő paraméterek, az intervallum-aritmetika a lehető legszűkebb eredményt adja (a bemenő paraméterek adott bizonytalansága esetén).

Egy egyszerű egyenlet intervallumokra

Probléma

Az I_b és I_c intervallumok adottak. Keressük azt az I_a intervallumot, amelyre $I_a + I_b = I_c$.

- Számok esetén $a = c - b$.
- Intervallumok esetén az $I_c - I_b$ különbség általában szélesebb, mint a megoldást jelentő I_a, amelyre $I_a + I_b = I_c$.
- Legyen $I_b = [2, 3]$ és $I_c = [6, 8]$. Ekkor $I_c - I_b = [3, 6]$. Azonban $I_a = [4, 5]$ megoldás, amelynél szélesebb a különbség.
- Ha I_b szélesebb, mint I_c (vagyis ha $\underline{c} - \underline{b} > \overline{c} - \overline{b}$), akkor nincs megoldás. Ellenkező esetben $I_a = [\underline{c} - \underline{b}, \overline{c} - \overline{b}]$.

FUZZY INTERVALLUMOK

Definíció

A valós számok egy M fuzzy részhalmazát fuzzy intervallumnak nevezzük, ha az $[M]^\alpha$ szinthalmazok valós intervallumok minden $\alpha \in]0,1]$ esetén.

- A szinthalmazok között lehetnek akár nemkorlátos intervallumok is.
- Ha azt akarjuk, hogy ezek az intervallumok még zártak is legyenek, akkor M tagsági függvénye felülről félig folytonos (fff) kell legyen.
- Gyakorlati szempontból folytonos tagsági függvényeket használunk.

Definíció

Legyen $L : [0, +\infty[\to [0, 1]$ nemnövekvő fff. függvény, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

- minden $x > 0$ esetén $L(x) < 1$;
- minden $x < 1$ esetén $L(x) > 0$;
- $L(0) = 1$;
- vagy $L(1) = 0$, vagy $L(x) > 0$ minden $x \in [0, +\infty[$ esetén, és $\lim\limits_{x \to +\infty} L(x) = 0$.

Ekkor L-et **oldalfüggvénynek** nevezzük.

Néhány példa ($x \in [0, +\infty[$):

- $L(x) = \max(1 - x^p, 0) \quad (p > 0)$,
- $L(x) = \max(1 - x, 0)^p \quad (p > 0)$,
- $L(x) = e^{-x}$,
- $L(x) = e^{-x^2}$,
- $L(x) = \frac{1}{x+1}$.

LR fuzzy intervallumok

Definíció

Legyen L és R oldalfüggvény, és legyen adott négy paraméter $\underline{m}, \overline{m} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\alpha, \beta \in [0, +\infty[$. Az alábbi alakú tagsági függvénnyel rendelkező fuzzy intervallumot LR fuzzy intervallumnak nevezzük:

$$M(x) = \begin{cases} L\left(\frac{\underline{m}-x}{\alpha}\right) & \text{ha } x \leq \underline{m} \\ 1 & \text{ha } \underline{m} \leq x \leq \overline{m} \\ R\left(\frac{x-\overline{m}}{\beta}\right) & \text{ha } x \geq \overline{m} \end{cases},$$

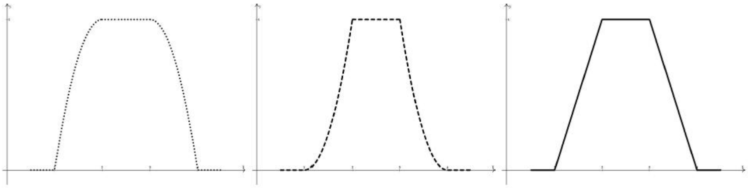
és így jelöljük: $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)_{LR}$.

- L, R: bal- és jobboldali fv.; ha $R = L$, akkor M szimmetrikus;
- α, β: bal- és jobboldali szélesség;
- $M(x) = 0$, ha $\alpha = 0$ és $x < \underline{m}$, valamint ha $\beta = 0$ és $x > \overline{m}$.

Példa LR fuzzy intervallumokra

Mindhárom példában $R = L$. Legyen $L_1(x) = \max(1 - x^2, 0)$, $L_2(x) = \max(1 - x, 0)^2$, és $L_3(x) = \max(1 - x, 0)$, és

$$\begin{aligned} M_1 &= (3, 2, 1, 1)_{L_1, L_1} \, , \\ M_2 &= (3, 2, 1, 1)_{L_2, L_2} \, , \\ M_3 &= (3, 2, 1, 1)_{L_3, L_3} \, . \end{aligned}$$



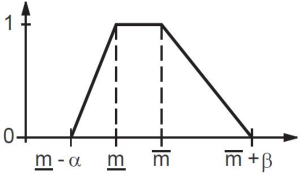
M_1 M_2 M_3

Megjegyzések

- Az LR fuzzy intervallumok osztálya nagyon bőséges. Egy fontos részosztály: a korlátos tartójú fuzzy intervallumok; ezek LR fuzzy intervallumok.
- $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)_{LR}$ magja nyilván $[\underline{m}, \overline{m}]$. Ekkor $\underline{m}$ az alsó modális érték, míg $\overline{m}$ a felső modális érték.
- Ha $supp(M)$ korlátos, akkor a tartó lezártja az $[\underline{m} - \alpha, \overline{m} + \beta]$ klasszikus intervallum.
- Ha mindkét szélesség 0, a fuzzy intervallum az $[\underline{m}, \overline{m}]$ hagyományos intervallummá válik. Ekkor írhatjuk, hogy $M = (\underline{m}, \overline{m}, 0, 0)_{LR}$ *bármilyen* oldalfüggvényekkel.
- Egy m valós szám is felírható $M = (m, m, 0, 0)_{LR}$ alakban, szintén tetszőleges oldalfüggvényekkel.

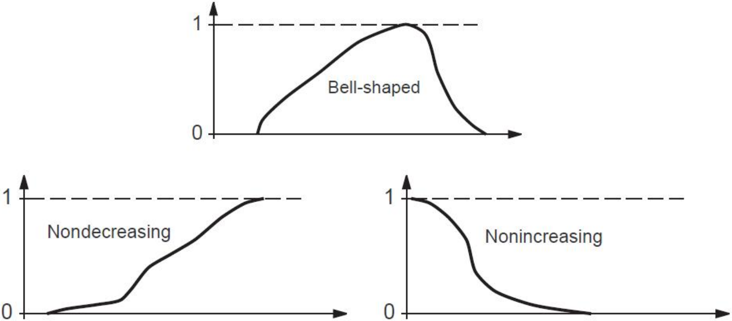
Megjegyzések
(folyt.)

- Ha $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)_{LR}$-ben $L(x) = R(x) = \max(1 - x, 0)$, akkor a fuzzy intervallum trapéz alakú:



- Ha az M fuzzy intervallum olyan, hogy $M(x) = 1$ ha $x > \underline{m}$, akkor az felírható $M = (\underline{m}, +\infty, \alpha, \beta)_{LR}$ alakban, ahol β és R választása lényegtelen.
- Hasonlóan, ha $M(x) = 1$ amikor $x < \underline{m}$, akkor $M = (-\infty, \overline{m}, \alpha, \beta)_{LR}$, ahol L és α választása lényegtelen.
- Csak három fő típusú fuzzy intervallum van: haranggörbe alakú (bell-shaped), nemcsökkenő (non-decreasing), valamint nemnövekvő (non-increasing).

Három típus



Fuzzy számok

Egy fuzzy szám olyasmi, mint „nagyjából 3”, „nulla körüli”, stb.

Definíció

A valós számok egy $M : \mathbb{R} \to [0,1]$ fuzzy részhalmazát fuzzy számnak nevezzük, ha

- pontosan egy olyan m szám van, amelyre $M(m) = 1$;
- $[M]^\alpha$ korlátos, zárt intervallum minden $\alpha \in]0,1]$ esetén;
- $supp(M)$ korlátos halmaz.

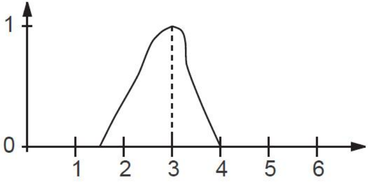
Miért éppen ezeket a tulajdonságokat várjuk el?

- „nagyjából 3" esetén maga a 3 teljes mértékben teljesíti ezt, de más szám már kevésbé.
- Szinthalmazok korlátos, zárt intervallumok; a tartó korlátos: egyszerűen ki tudjuk terjeszteni a klasszikus aritmetikai műveleteket.

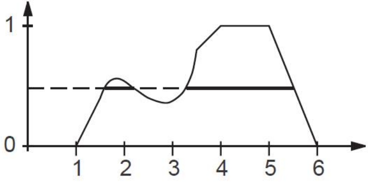
Definíció

Azt mondjuk, hogy a valós számok egy $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ fuzzy részhalmaza konvex, ha $[A]^\alpha$ korlátos, zárt intervallum minden $\alpha \in]0,1]$ esetén.

Illusztráció



„Nagyjából 3”.



Nem konvex fuzzy halmaz.

Az, hogy egy fuzzy halmaz konvex, nem azt jelenti, hogy a tagsági függvénye konvex függvény!!! Sőt.

TÉTEL

A valós számok egy A fuzzy részhalmaza pontosan akkor konvex, ha tagsági függvényére teljesül az alábbi egyenlőtlenség minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén:

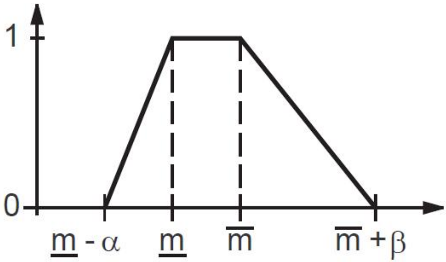
$$A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_2)\}.$$

Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy van olyan $[\underline{m}, \overline{m}]$ intervallum, hogy

- A értéke 1 az $[\underline{m}, \overline{m}]$ intervallumon;
- A nemcsökkenő, jobbról folytonos függvény a $]-\infty, \underline{m}[$ intervallumon;
- A nemnövekvő, balról folytonos függvény a $]\overline{m}, \infty[$ intervallumon.

Háromszög és trapéz alakú fuzzy számok (intervallumok)

Amint már mondtuk, a legegyszerűbb esetben az oldalfüggvények lineárisak:



Trapéz alakú fuzzy intervallum $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)$.

Trapéz alakú fuzzy intervallum

Egy M fuzzy szám trapéz alakú, ha tagsági függvénye felírható az alábbi alakban:

$$M(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq \underline{m} - \alpha, \\ \dfrac{x - (\underline{m} - \alpha)}{\alpha} & \text{ha } \underline{m} - \alpha < x < \underline{m}, \\ 1 & \text{ha } \underline{m} \leq x \leq \overline{m}, \\ \dfrac{\overline{m} + \beta - x}{\beta} & \text{ha } \overline{m} < x < \overline{m} + \beta, \\ 0 & \text{ha } x \geq \overline{m} + \beta, \end{cases}$$

ahol $\underline{m} \leq \overline{m}$ valós számok, $\alpha, \beta \geq 0$.

Megjegyzések

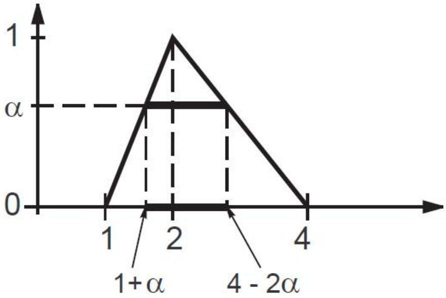
- Más terminológia: ez is trapéz alakú fuzzy szám.
- Egy trapéz alakú fuzzy szám reprezentálható az $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)$ számnégyessel.
- α: a fuzzy szám baloldali szélessége (β a jobboldali szélesség).
- Más reprezentáció: amikor a trapéz négy csúcsának első koordinátáit soroljuk fel növekvő sorrendben. A fenti alak esetén ekkor $M = \langle \underline{m} - \alpha, \underline{m}, \overline{m}, \overline{m} + \beta \rangle$.
- Amennyiben egy $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)$ trapéz alakú fuzzy intervallum olyan, hogy $\underline{m} = \overline{m}$, akkor azt háromszög alakú fuzzy számnak hívjuk.
- Ha ezt a közös értéket m jelöli, akkor egyszerűen azt írjuk, hogy $M = (m, \alpha, \beta)$.

Példa

Tekintsük a $M = (2, 1, 2)$ háromszög alakú fuzzy számot. Tagsági függvénye így írható:

$$M(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 1, \\ x - 1 & \text{ha } 1 < x < 2, \\ 1 & \text{ha } x = 2, \\ \dfrac{4 - x}{2} & \text{ha } 2 < x < 4, \\ 0 & \text{ha } x \geq 4, \end{cases}$$

és a következő oldalon látható.



Háromszög alakú fuzzy szám $M = (2, 1, 2)$ és α-szinthalmaza.

Fuzzy intervallumok közti műveletek

- Feltesszük, hogy a szóban forgó tagsági függvények folytonosak.
- Trapéz alakú fuzzy intervallumok (háromszög alakú fuzzy számok) összegét, különbségét, szorzatát, hányadosát az intervallum-aritmetika segítségével, szinthalmazonként fogjuk értelmezni.
- Ezt az teszi lehetővé, hogy
    - bármely fuzzy halmaz egyértelműen reprezentálható az összes szinthalmazával:
      $$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [A]^\alpha,$$
      illetve hogy
    - a szinthalmazok valós intervallumok.

Legyenek M és N fuzzy számok, és $*$ a valós intervallumokon értelmezett négy alapművelet (összeadás $(+)$, kivonás $(-)$, szorzás $(\cdot)$ és osztás $(/)$,) valamelyike.

Értelmezzünk egy $M * N$-nel jelölt fuzzy halmazt $\mathbb{R}$-en úgy, hogy az $[M * N]^\alpha$ szinthalmaz legyen egyenlő az $[M]^\alpha$ és $[N]^\alpha$ szinthalmazokra (mint korlátos, zárt intervallumokra) alkalmazott $*$ művelet eredményével.

Vagyis legyen

$$[M * N]^\alpha := [M]^\alpha * [N]^\alpha, \quad \alpha \in]0, 1].$$

Természetesen az osztás esetén feltesszük, hogy $0 \notin [N]^\alpha$.

Összeadás

Legyen $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)$ és $N = (\underline{n}, \overline{n}, \gamma, \delta)$ két trapéz alakú fuzzy intervallum. Az előző általános elvet alkalmazva az összeadásra $(* = +)$ azt kapjuk, hogy

$$M + N = (\underline{m} + \underline{n}, \overline{m} + \overline{n}, \alpha + \gamma, \beta + \delta).$$

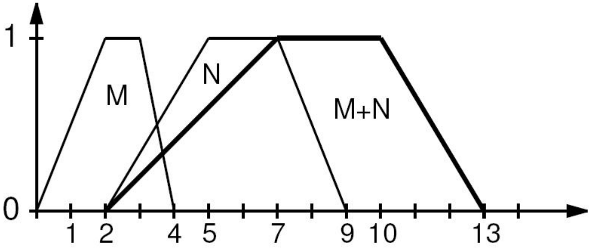
Vagyis két M, N trapéz alakú fuzzy intervallum összege $M + N$ is trapéz alakú fuzzy intervallum, amelynek magja az M, N magjainak összege, baloldali (jobboldali) szélessége pedig az M, N baloldali (jobboldali) szélességeinek összege.

Ezért az összeg bizonytalansága legalább akkora, mint az összeadandók bizonytalansága.

Példa

Összeg

Legyen $M = (2, 3, 2, 1)$ és $N = (5, 7, 3, 2)$. Ekkor $M + N = (7, 10, 5, 3)$.



Fuzzy intervallum számszorosa

Legyen $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)$, és $r \in \mathbb{R}$. Mivel egy valós szám speciális fuzzy intervallum, erre is alkalmazható a fenti általános gondolatmenet. A következő adódik:

$$r \cdot M = \begin{cases} (r \cdot \underline{m}, r \cdot \overline{m}, r \cdot \alpha, r \cdot \beta) & \text{ha } r \geq 0, \\ (r \cdot \overline{m}, r \cdot \underline{m}, |r| \cdot \beta, |r| \cdot \alpha) & \text{ha } r < 0. \end{cases}$$

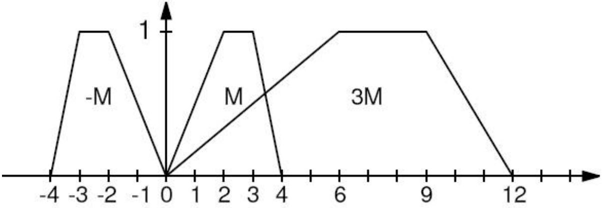
Speciálisan, $r = -1$ az M ellentettjét $(-M)$ adja:

$$-M = (-\overline{m}, -\underline{m}, \beta, \alpha) \; .$$

Példa

számszoros

Legyen $M = (2, 3, 2, 1)$. Ekkor $3 \cdot M = (6, 9, 6, 3)$ és $-M = (-3, -2, 1, 2)$.



Különbség

Legyen $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)$ és $N = (\underline{n}, \overline{n}, \gamma, \delta)$. Különbségüket a már eddig megismert műveletek alapján értelmezzük:

$$N - M := N + (-M) \ .$$

Ez gyakorlatilag az alábbit jelenti:

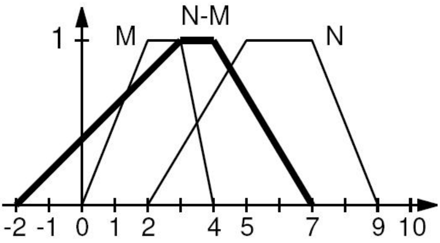
$$N - M = (\underline{n} - \underline{m}, \overline{n} - \overline{m}, \alpha + \gamma, \beta + \delta).$$

Példa

különbség

Legyen $M = (2, 3, 2, 1)$ és $N = (5, 7, 3, 2)$. Ekkor

$$N - M = (5 - 2, 7 - 3, 2 + 3, 1 + 2) = (3, 4, 5, 3) \ ,$$



Szorzat

nehézségek

Legyenek $M = (m, \lambda, \beta)$ és $N = (n, \gamma, \delta)$ háromszög alakú fuzzy számok. Ezekkel mutatjuk be a szorzat kiszámítása közben fellépő problémákat. Tekintsük az α-szinthalmazokat. Könnyen látható, hogy az alábbiak érvényesek:

$$[M]^\alpha = [\lambda\alpha + (m - \lambda), -\beta\alpha + (m + \beta)],$$

$$[N]^\alpha = [\gamma\alpha + (n - \gamma), -\delta\alpha + (n + \delta)].$$

Ebből pedig az $[M \cdot N]^\alpha$ baloldali végpontja:

$$\lambda\gamma\alpha^2 + \lambda(m - \lambda)\alpha + \gamma(n - \gamma)\alpha + (m - \lambda)(n - \gamma),$$

jobboldali végpontja pedig

$$\beta\delta\alpha^2 - \beta(m + \beta)\alpha - \delta(n + \delta)\alpha + (m + \beta)(n + \delta).$$

Például, ha $M = (2, 1, 2)$ és $N = (5, 3, 2)$, akkor $[M]^\alpha = [1 + \alpha, 4 - 2\alpha]$ és $[N]^\alpha = [2 + 3\alpha, 7 - 2\alpha]$, és így

$$[M \cdot N]^\alpha = [3\alpha^2 + 5\alpha + 2, 4\alpha^2 - 22\alpha + 28] \quad (\alpha \in [0, 1]) .$$

Ez a tényleges szorzat. Azonban az oldalfüggvények NEM lineárisak α-ban, hanem kvadratikusak. A „csúcsokat" összekötő görbék parabolák!

Vagyis két trapéz alakú fuzzy szám szorzata NEM trapéz alakú!

Szorzat

Trapéz alakú közelítés

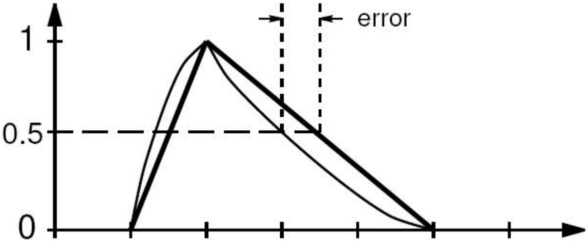
Alapelv: csak a magok és a tartók szorzatát tekintjük. Az így kapott magot és tartót lineáris oldalfüggvénnyel kötjük össze.

Legyen $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)$ és $N = (\underline{n}, \overline{n}, \gamma, \delta)$. Ekkor

$$M \cdot N \approx (\underline{m} \cdot \underline{n}, \overline{m} \cdot \overline{n}, \underline{m} \cdot \underline{n} - (\underline{m} - \alpha)(\underline{n} - \gamma), (\overline{m} + \beta)(\overline{n} + \delta) - \overline{m} \cdot \overline{n}) \; .$$

Belátható, hogy e közelítés α-szinthalmaza a valódi szorzat α-szintvonalához képest jobbra tolva helyezkedik el.

Hiba



Reciprok

Legyen $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)$, és tegyük fel, hogy M vagy pozitív (azaz $\underline{m} - \alpha > 0$), vagy negatív (azaz $\overline{m} + \beta < 0$). Ekkor

$$\frac{1}{M} \approx \left(\frac{1}{\overline{m}}, \frac{1}{\underline{m}}, \frac{\beta}{\overline{m} \cdot (\overline{m} + \beta)}, \frac{\alpha}{\underline{m} \cdot (\underline{m} - \alpha)} \right) .$$

Hányados

Legyen $M = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)$ és $N = (\underline{n}, \overline{n}, \gamma, \delta)$. Ekkor

$$\frac{N}{M} = N \cdot \frac{1}{M} \approx \left(\frac{\underline{n}}{\overline{m}}, \frac{\overline{n}}{\underline{m}}, \frac{\underline{n}}{\overline{m}} - \frac{\underline{n} - \gamma}{\overline{m} + \beta}, \frac{\overline{n} + \delta}{\underline{m} - \alpha} - \frac{\overline{n}}{\underline{m}} \right).$$

Példa

Legyen $M = (2, 1, 2)$ és $N = (5, 3, 2)$. Ekkor

$$\frac{1}{M} \approx \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2(2+2)}, \frac{1}{2(2-1)}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{8}, \frac{1}{2}\right),$$

és így

$$\frac{N}{M} = N \cdot M \approx \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} - \frac{5-3}{2+2}, \frac{5+2}{2-1} - \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 2, \frac{9}{2}\right).$$