2. Alapfogalmak, műveletek

Gépi intelligencia I.

Fodor János

BMF NIK IMRI

NIMGI1MIEM

Tartalomjegyzék I

Tartalomjegyzék II

MIT TUDUNK EDDIG?

Klasszikus kétértékű logika

- Az igazságértékek halmaza két elemű: $\{0, 1\}$.
- Két bináris alapművelet: $\wedge, \vee$.
- Egy unáris alapművelet: $\neg$.
- A többi logikai művelet (például implikáció $\rightarrow$, logikai ekvivalencia $\leftrightarrow$, stb) megkonstruálható az $\wedge, \vee, \neg$ alapműveletekből.

Karakterisztikus függvény

Egy adott X halmaz bármely A részhalmazát egyértelműen azonosíthatjuk egy $X \to \{0,1\}$ függvénnyel, az A karakterisztikus függvényével:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A \\ 0, & \text{ha } x \notin A \end{cases}.$$

A halmazműveletek leírhatók a karakterisztikus függvényeken végzett műveletekkel:

$$\begin{aligned} \chi_{A\cap B}(x) &= \min(\chi_A(x), \chi_B(x)), \\ \chi_{A\cup B}(x) &= \max(\chi_A(x), \chi_B(x)), \\ \chi_{\overline{A}}(x) &= 1 - \chi_A(x). \end{aligned}$$

Továbbá $A \subseteq B$ pontosan akkor, ha $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ igaz minden $x \in X$ esetén.

Tagsági függvény, fuzzy halmaz

Fuzzy halmazok esetén a hozzá tartozás és nemtartozás között fokozatos az átmenet. Ezt a tagsági függvény segítségével tudjuk leírni. A tagsági függvény a karakterisztikus függvény általánosítása arra az esetre, amikor a lehetséges értékek $\{0, 1\}$ halmazát kiterjesztjük a zárt egységintervallumra, vagyis $[0, 1]$-re.

Definíció

Legyen $X \neq \emptyset$ adott halmaz. Az X egy A fuzzy részhalmazát annak $\mu_A : X \to [0, 1]$ tagsági függvényével jellemezzük. Valamely $x \in X$ esetén a $\mu_A(x)$ szám azt fejezi ki, hogy x milyen mértékig tartozik hozzá az A fuzzy halmazhoz.

Azt is mondjuk, hogy A fuzzy halmaz X-en, vagy egyszerűen csak azt, hogy A fuzzy halmaz.

Jelölések

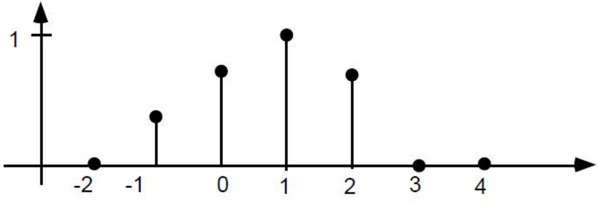
- Egy X alaphalmaz fuzzy részhalmazainak összességét $\mathcal{F}(X)$ jelöli.
- Az egyszerűség kedvéért egy A fuzzy halmazt és annak tagsági függvényét is ugyanazzal az A szimbólummal jelöljük.
- Ha $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ véges halmaz és A egy fuzzy halmaz X-en, akkor az alábbi jelölés elterjedt az irodalomban:

$$A = \mu_1/x_1 + \cdots + \mu_n/x_n,$$

ahol a μ_i/x_i, $i = 1, \ldots, n$ szimbólum azt fejezi ki, hogy μ_i az x_i tagsági értéke A-ban; a plusz jel pedig az uniót jelenti (lásd még: valószínűség-számítás, események összege).

Példa

Diszkrét fuzzy halmaz A: „x közel van 1-hez"

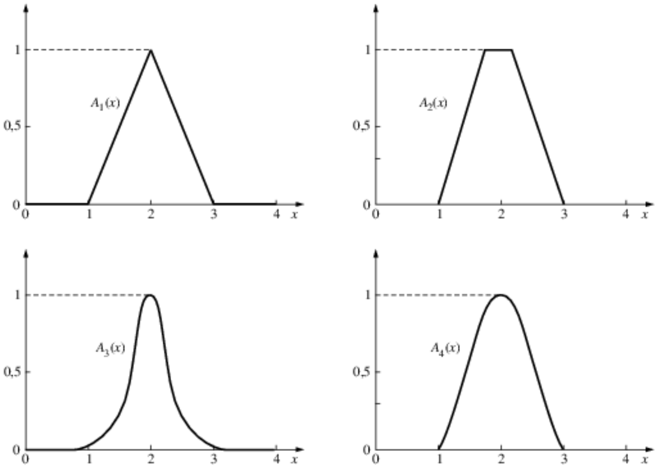


$$X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$A = 0/(-2) + 0.3/(-1) + 0.8/0 + 1/1 + 0.8/2 + 0.3/3 + 0/4.$$

Példa

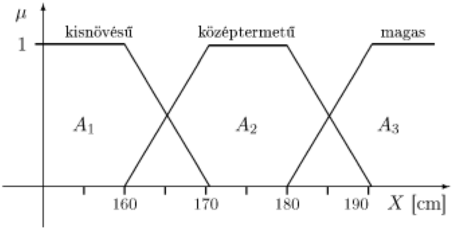
Valós fuzzy halmaz A: „x körülbelül 2”



ALAPVETŐ FOGALMAK

Ebben a részben fuzzy halmazokra vonatkozó alapvető fogalmakat vezetünk be, egy példán illusztrálva azokat.

Az emberek magasságára vonatkozó „kisnövésű”, „középtermetű”, illetve „magas” fogalmakat az alábbi trapéz alakú tagsági függvényekkel reprezentáljuk:



TAGSÁGI FÜGGVÉNYEK

A_1 =„KISNÖVÉSŰ”, A_2 =„KÖZÉPTERMETŰ”, A_3 =„MAGAS”

$$A_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \leq 160 \\ (170 - x)/10, & \text{ha } 160 < x < 170 \\ 0, & \text{ha } x \geq 170 \end{cases},$$

$$A_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 160 \text{ vagy } x \geq 190 \\ (x - 160)/10, & \text{ha } 160 < x < 170 \\ 1, & \text{ha } 170 \leq x \leq 180 \\ (190 - x)/10, & \text{ha } 180 < x < 190 \end{cases},$$

$$A_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 180 \\ (x - 180)/10, & \text{ha } 180 < x < 190 \\ 1, & \text{ha } x \geq 190 \end{cases}.$$

Fuzzy halmaz tartója

Definíció

Legyen A az X halmaz egy fuzzy részhalmaza. Az A tartója az a $supp(A)$-val jelölt crisp részhalmaza X-nek, amely az A-ban pozitív tagsági értékkel rendelkező elemekből áll:

$$supp(A) = \{x \in X \mid A(x) > 0\}.$$

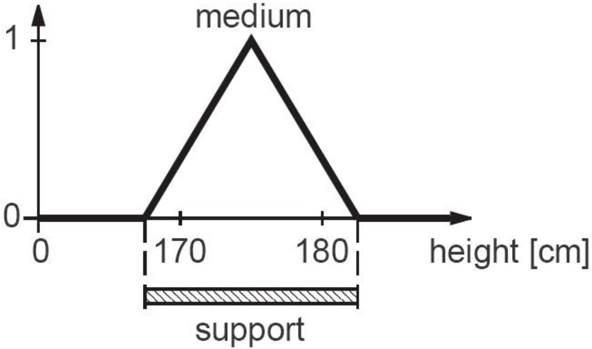
A fenti példákban

- $supp(A_1) =]m, 170[$
- $supp(A_2) =]160, 190[$
- $supp(A_3) =]180, M[$

Itt m a valaha mért legkisebb felnőtt magassága, míg M a legmagasabbé.

Fuzzy halmaz tartója (support)

Illusztráció



Fuzzy halmaz magja

Definíció

Legyen A az X halmaz egy fuzzy részhalmaza. Az A magja az a $core(A)$-val jelölt crisp részhalmaza X-nek, amely az A-ban teljes (vagyis 1) tagsági értékkel rendelkező elemekből áll:

$$core(A) = \{x \in X \mid A(x) = 1\}.$$

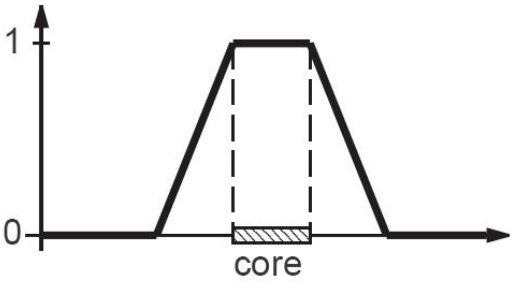
A fenti példákban

- $core(A_1) = [m, 160]$
- $core(A_2) = [170, 180]$
- $core(A_3) = [190, M]$

Itt m a valaha mért legkisebb felnőtt magassága, míg M a legmagasabbé.

Fuzzy halmaz magja (core)

Illusztráció



α-SZINTHALMAZ

DEFINÍCIÓ

Legyen A az X halmaz egy fuzzy részhalmaza, és $\alpha \in [0,1]$. Az A α-szinthalmaza a kövekező módon definiált $[A]^\alpha$ klasszikus halmaz:

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{t \in X \mid A(t) \geq \alpha\} & \text{ha } \alpha > 0 \\ cl(\text{supp}A) & \text{ha } \alpha = 0 \end{cases}$$

ahol $cl(\text{supp}A)$ az A tartójának a lezártja.

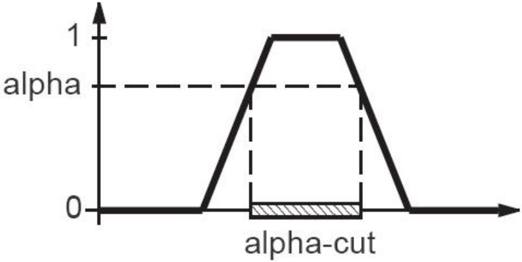
Tehát $[A]^\alpha$ az alaphalmaz minden olyan elemét tartalmazza, amelynek az adott halmazbeli tagsági értéke legalább α.

A testmagasságra vonatkozó fenti példában

- $[A_1]^\alpha = [m, 170 - 10\alpha]$
- $[A_2]^\alpha = [160 + 10\alpha, 190 - 10\alpha]$
- $[A_3]^\alpha = [180 + 10\alpha, M]$

α-SZINTHALMAZ (α-CUT)

Illusztráció



Példa

Diszkrét fuzzy halmaz α-szinthalmazai

Legyen $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ és

$$A = 0.0/(-2) + 0.3/(-1) + 0.6/0 + 1.0/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.0/4.$$

Ekkor

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{-1, 0, 1, 2, 3\} & \text{ha } 0 \leq \alpha \leq 0.3 \\ \{0, 1, 2\} & \text{ha } 0.3 < \alpha \leq 0.6 \\ \{1\} & \text{ha } 0.6 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Szinthalmazok tulajdonságai

Legyen A fuzzy halmaz és $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$.

1. Ha $\alpha_1 < \alpha_2$, akkor $[A]^{\alpha_1} \supset [A]^{\alpha_2}$.
2. Ebből következik, hogy egy fuzzy halmaz α-szinthalmazai egymásba ágyazott halmazcsaládot alkotnak.
3. $core(A) = [A]^1$ bármely A fuzzy halmaz esetén.

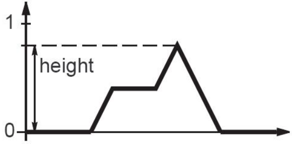
Szokás még fuzzy halmazok szigorú α-szinthalmazait is értelmezni:

$$[A]^{+\alpha} = \{t \in X \mid A(t) > \alpha\}.$$

Fuzzy halmaz magassága, normális fuzzy halmaz

Definíció

Egy A fuzzy halmaz $h(A)$-val jelölt magasságán a tagsági függvénye szuprémumát értjük: $h(A) = \sup_{x \in X} A(x)$.



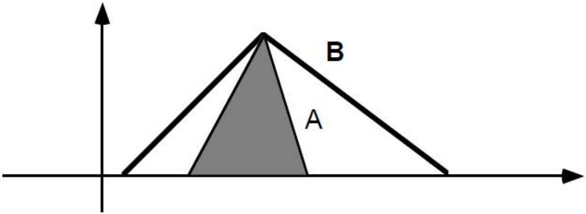
Definíció

Egy A fuzzy halmazt normálisnak nevezünk, ha $h(A) = 1$. Ellenkező esetben (vagyis amikor $h(A) < 1$) pedig szubnormálisnak.

Részhalmaz

Definíció

Legyenek A és B fuzzy halmazok X-en. Azt mondjuk, hogy A részhalmaza B-nek, jelölésben $A \subseteq B$, ha $A(t) \leq B(t)$ minden $t \in X$ esetén.



Egyenlőség

Definíció

Legyenek A és B fuzzy halmazok X-en. Azt mondjuk, hogy A egyenlő B-vel, jelölésben $A = B$, ha $A(t) = B(t)$ minden $t \in X$ esetén.

A klasszikus esethez hasonlóan érvényesek az alábbiak (A és B fuzzy halmazok X-en):

1. $A = B$ pontosan akkor, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.
2. $\emptyset \subseteq A$.
3. $A \subseteq X$.

Itt $\emptyset(x) = 0$ és $X(x) = 1$ minden $x \in X$ esetén.

STANDARD MŰVELETEK FUZZY HALMAZOKON

Klasszikus halmazműveletek

Láttuk a múltkor: a halmazműveletek a klasszikus halmazok karakterisztikus függvénye segítségével több különböző módon is megfogalmazhatók crisp halmazokon. Például:

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cap B}(x) &= \min(\chi_A(x), \chi_B(x)),\\
\chi_{A\cup B}(x) &= \max(\chi_A(x), \chi_B(x)),\\
\chi_{\overline{A}}(x) &= 1 - \chi_A(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cap B}(x) &= \chi_A(x) \cdot \chi_B(x),\\
\chi_{A\cup B}(x) &= \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x),\\
\chi_{\overline{A}}(x) &= \sqrt{1 - [\chi_A(x)]^2}.
\end{aligned}$$

Kérdés

Hogyan terjesszük ki a klasszikus halmazműveleteket fuzzy halmazokra?

Standard műveletek fuzzy halmazokon

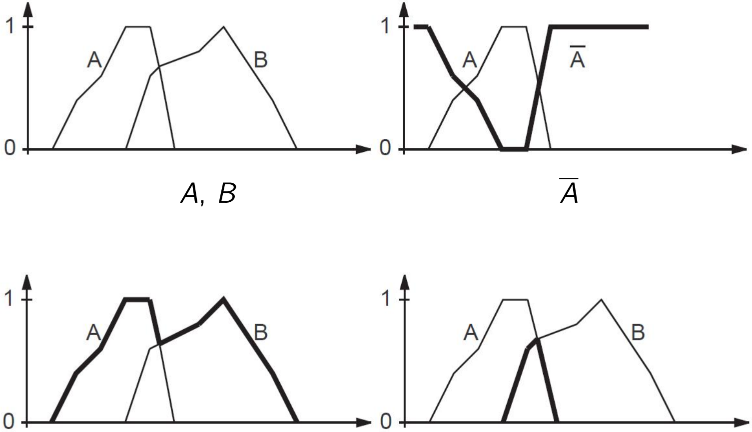
Definíció

Legyen $A, B \in \mathcal{F}(X)$. E két fuzzy halmaz $A \cap B$ metszetét, $A \cup B$ unióját, és az A fuzzy halmaz $\overline{A}$ komplementerét (kiegészítő halmazát) az alábbi módon értelmezzük, a tagsági függvényeik segítségével ($x \in X$):

$$\begin{aligned} (A \cap B)(x) &= \min(A(x), B(x)), \\ (A \cup B)(x) &= \max(A(x), B(x)), \\ \overline{A}(x) &= 1 - A(x). \end{aligned}$$

Ezeket standard halmazműveleteknek nevezzük $\mathcal{F}(X)$-en.

1. Illusztráció

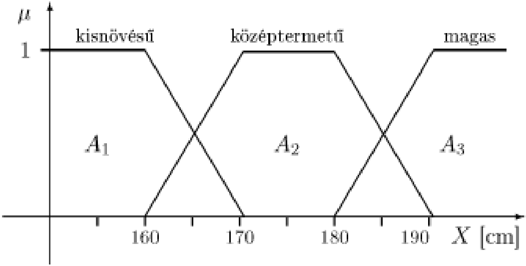


A, B — $\overline{A}$

$A \cup B$ — $A \cap B$

2. Illusztráció

Tekintsük a korábbi testmagasságra vonatkozó fuzzy halmazokat:



Az előbbiek alapján látható, hogy $\overline{A_2} = A_1 \cup A_2$.

Ez teljes összhangban van azzal, hogy ha valaki nem középtermetű, akkor vagy magas, vagy kisnövésű.

Tétel

Legyen $A, B \in \mathcal{F}(X)$ és $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Ekkor a standard műveletekre és a szinthalmazokra az alábbi állítások érvényesek:

(i) $[A]^\alpha \subseteq [A]^\beta$ pontosan akkor, ha $\alpha \geq \beta$.

(ii) $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$ és $[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$.

(iii) $[\overline{A}]^\alpha = \overline{[A]^{+(1-\alpha)}}$.

(iv) $A \subseteq B$ pontosan akkor, ha $[A]^\alpha \subseteq [B]^\alpha$ minden $\alpha \in [0, 1]$ esetén.

Tétel

Bármely $A, B \in \mathcal{F}(X)$ esetén a standard műveletekre érvényesek a De Morgan azonosságok:

- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Nézzük például az elsőt:

$$
\begin{aligned}
\overline{(A \cup B)}(x) &= 1 - (A \cup B)(x) = 1 - \max(A(x), B(x)) \\
&= \min(1 - A(x), 1 - B(x)) \\
&= (\overline{A} \cap \overline{B})(x).
\end{aligned}
$$

Legyen X adott halmaz. Klasszikus $A \subseteq X$ halmaz esetén mindig igaz, hogy

$$A \cup \overline{A} = X \quad \text{(a harmadik kizárásának elve, } A \in \mathcal{P}(X)\text{)}.$$

Fuzzy halmazok és a standard műveletek esetén nem érvényes a harmadik kizárásának elve. Valóban, ha $A \in \mathcal{F}(X)$, akkor

$$(A \cup \overline{A})(x) = \max(A(x), \overline{A}(x)) = \max(A(x), 1 - A(x)),$$

ezért $(A \cup \overline{A})(x) = 1$ pontosan akkor, ha $A(x) = 1$ vagy $A(x) = 0$; vagyis pontosan akkor, ha A crisp halmaz.

Legyen X adott halmaz. Klasszikus $A \subseteq X$ halmaz esetén mindig igaz, hogy

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \quad \text{(az ellentmondás elve, } A \in \mathcal{P}(X)\text{).}$$

Fuzzy halmazok és a standard műveletek esetén nem érvényes az ellentmondás elve. Valóban, ha $A \in \mathcal{F}(X)$, akkor

$$(A \cap \overline{A})(x) = \min(A(x), \overline{A}(x)) = \min(A(x), 1 - A(x)),$$

ezért $(A \cap \overline{A})(x) = 0$ pontosan akkor, ha $A(x) = 1$ vagy $A(x) = 0$; vagyis pontosan akkor, ha A crisp halmaz.

ÁLTALÁNOS MŰVELETEK FUZZY HALMAZOKON

Ebben a fejezetben azt tanulmányozzuk, hogy az előbb bevezetett standard műveletek mellett tudunk-e értelmes módon más műveleteket is értelmezni fuzzy halmazokon.

A klasszikus esetben az alábbiak érvényesek:

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \{a \mid \textbf{NEM } (a \in A)\},\\ A \cap B &= \{a \mid (a \in A) \textbf{ ÉS } (a \in B)\},\\ A \cup B &= \{a \mid (a \in A) \textbf{ VAGY } (a \in B)\}.\end{aligned}$$

Vagyis a logikai műveletek (**NEM** negáció, **ÉS** konjunkció, **VAGY** diszjunkció) és a „tagsági értékek" ($a \in A$, $a \in B$) ismeretében tudjuk megmondani az egyes elemek tagsági értékeit A komplementerében, $A \cap B$-ben és $A \cup B$-ben.

Ezért fuzzy halmazok esetén alapvetően a negáció, konjunkció és diszjunkció megfelelő kiterjesztésére van szükségünk a $\{0, 1\}$ kételemű halmazról a $[0, 1]$ intervallumra.

Három függvényből indulunk ki, amelyek segítségével a műveletek eredményeiként kapott fuzzy halmazok tagsági függvényei értelmezhetők.

Legyenek $N : [0,1] \to [0,1]$, $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ és $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ függvények később meghatározandó további tulajdonságokkal. Tetszőleges $A, B \in \mathcal{F}(X)$ és $x \in X$ esetén legyen

$$\begin{aligned} \overline{A}_N(x) &= N(A(x)) && (A \text{ komplementere}) \\ (A \cap_T B)(x) &= T(A(x), B(x)) && (A \text{ és } B \text{ metszete}) \\ (A \cup_S B)(x) &= S(A(x), B(x)) && (A \text{ és } B \text{ uniója}) \end{aligned}$$

NEGÁCIÓK

Mivel N a klasszikus (kétértékű) negáció kiterjesztése, ezért minimális elvárás az, hogy a klasszikus negáció tulajdonságai teljesüljenek N-re:

(N1)

$$N(0) = 1 \text{ és } N(1) = 0.$$

Természetes elvárás az is, hogy minél nagyobb egy elem tagsági értéke A-ban, annál kisebb legyen $\overline{A}$-ban. Azaz

(N2)

$$N \text{ nemnövekvő függvény:} \quad x \leq y \text{ esetén } N(x) \geq N(y).$$

További természetes feltételek:

(N3)

N szigorúan csökkenő függvény

(N4)

N folytonos függvény

(N5)

N involutív : $N(N(x)) = x$ minden $x \in [0, 1]$ esetén

Definíció

Egy $N : [0,1] \to [0,1]$ függvényt negációnak nevezünk, ha kielégíti az (N1) és (N2) feltételeket.

Egy negációt szigorúnak hívunk, ha teljesül rá (N3) és (N4) is.

Egy szigorú negációt erősnek nevezünk, ha (N5) is teljesül.

Megjegyzések:

- Egy N szigorú negációnak (mint függvénynek) létezik inverze: N^{-1}. Ez is szigorú negáció, általában különbözik N-től. Nyilvánvaló, hogy $N = N^{-1}$ pontosan akkor teljesül, ha N involutív (azaz, ha erős negáció).
- Bármely N szigorú negáció esetén egyértelműen létezik olyan $\nu \in \,]0,1[\,$, amelyre $N(\nu) = \nu$ fennáll (ν a N szigorú negáció fixpontja). Ekkor persze $N^{-1}(\nu) = \nu$ is teljesül.

Példák

Intuicionisztikus negáció

$$N_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x > 0 \end{cases},$$

Duál intuicionisztikus negáció

$$N_{di}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 1 \\ 0 & \text{if } x = 1 \end{cases},$$

Könnyen látható, hogy bármely N negáció esetén $N_i \leq N \leq N_{di}$

Standard negáció

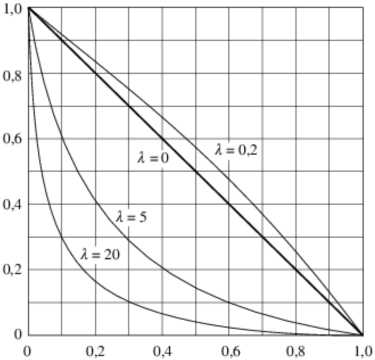
$$N_s(x) = 1 - x.$$

Szigorú negáció, amely nem erős

$$N(x) = 1 - x^2.$$

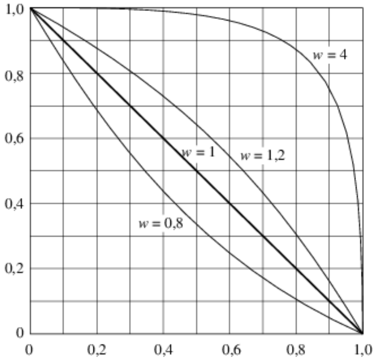
A Sugeno-féle parametrikus osztály

$$N_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}, \quad \lambda > -1.$$



A Yager-féle parametrikus osztály

$$N_w(x) = (1 - x^w)^{1/w}, \quad w \in \,]0, \infty[.$$



Erős negációk reprezentációs tétele

Definíció

Legyen $[a, b]$ valós intervallum. Egy folytonos, szigorúan növekvő $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ függvényt, amelyre teljesülnek a $\varphi(a) = a, \varphi(b) = b$ határfeltételek, az $[a, b]$ egy automorfizmusának nevezünk.

Tétel

Egy $N : [0, 1] \to [0, 1]$ függvény pontosan akkor erős negáció, ha van olyan φ automorfizmusa a $[0, 1]$ intervallumnak, amellyel minden $x \in [0, 1]$ esetén

$$N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

Ebben az esetben az $N_\varphi(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$ negációt a standard negáció φ-transzformáltjának nevezzük.

KONJUNKCIÓK (T-NORMÁK)

Most a klasszikus logikai konjunkciót terjesztjük ki. Legyen X adott alaphalmaz, és $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Induljunk ki a klasszikus metszet alábbi tulajdonságaiból:

1. $X \cap A = A$ (identitás);
2. $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás);
3. Ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap C \subseteq B \cap C$ (monotonitás);
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asszociativitás).

Ezeket szeretnénk megőrizni a kiterjesztés során. Vagyis az alábbi tulajdonságokat várjuk el a konjunkciót megvalósító $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ függvénytől:

(T1)

$T(1, x) = x$ minden $x \in [0, 1]$ esetén.

(T2)

$T(x, y) = T(y, x)$ minden $x, y \in [0, 1]$ esetén.

(T3)

T nemcsökkenő függvény: $T(x, y) \leq T(z, y)$ ha $x \leq z$.

(T4)

T asszociatív: $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$
minden $x, y, z \in [0, 1]$ esetén.

Trianguláris normák (t-normák)

Definíció

Egy $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ függvényt trianguláris normának (röviden: t-normának) nevezünk, ha teljesíti a fenti (T1)–(T4) axiómákat.

- (T1) és (T3) alapján az is igaz, hogy $T(x,0) = 0$ minden $x \in [0,1]$ esetén;
- Ugyanezért bármely T t-normára teljesül, hogy $T(x,y) \leq \min(x,y)$ minden $x, y \in [0,1]$ esetén.

Itt min a standard konjunkció. Ez vajon t-norma? Igen.

A négy standard t-norma

$$T_{\mathbf{M}}(x, y) = \min(x, y)$$

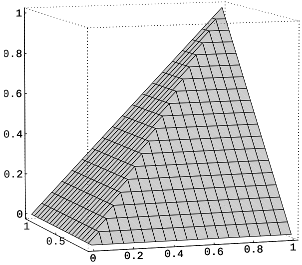
$$T_{\mathbf{P}}(x, y) = x \cdot y$$

$$T_{\mathbf{L}}(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$$

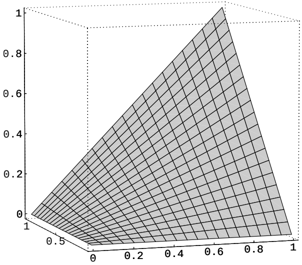
$$T_{\mathbf{D}}(x, y) = \begin{cases} x & \text{ha } y = 1 \\ y & \text{ha } x = 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A négy standard t-norma (folyt.)

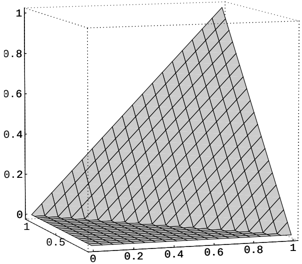
$T_\mathbf{M}$



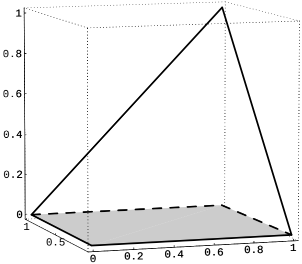
$T_\mathbf{P}$



$T_\mathbf{L}$



$T_\mathbf{D}$



A négy standard t-norma – néhány észrevétel

- Minden $x, y \in [0,1]$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

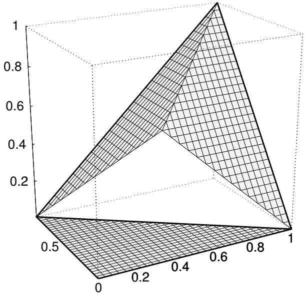
$$T_{\mathbf{D}}(x,y) \leq T_{\mathbf{L}}(x,y) \leq T_{\mathbf{P}}(x,y) \leq T_{\mathbf{M}}(x,y)$$

- Könnyen ellenőrizhető, hogy $T_{\mathbf{M}}$ a legnagyobb t-norma, és az is, hogy $T_{\mathbf{D}}$ a legkisebb.
- $T_{\mathbf{M}}$ az egyetlen idempotens t-norma ($T(x,x) = x$).
- $T_{\mathbf{D}}$ kivételével a többi folytonos.
- $T_{\mathbf{P}}$ az egyetlen differenciálható.
- $T_{\mathbf{P}}$ az egyetlen szigorúan növekvő.

A nilpotens minimum

Az első ismert balról folytonos t-norma

$$T_{\mathbf{nM}}(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{ha } x+y>1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



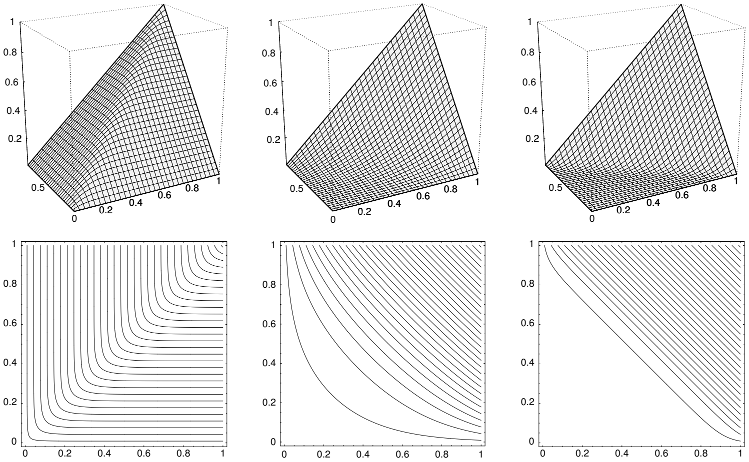
Paraméteres t-norma családok

A Frank család $(T_\lambda^{\mathbf{F}})_{\lambda\in[0,\infty]}$

$$T_\lambda^{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{cases} T_{\mathbf{M}}(x,y) & \text{ha } \lambda = 0 \\ T_{\mathbf{P}}(x,y) & \text{ha } \lambda = 1 \\ T_{\mathbf{L}}(x,y) & \text{ha } \lambda = \infty \\ \log_\lambda\left(1 + \frac{(\lambda^x-1)(\lambda^y-1)}{\lambda-1}\right) & \text{ha } \lambda \in\,]0,1[\, \cup\,]1,\infty[\end{cases}$$

A Frank család – példák

$\lambda = 10^{-9}$ $\lambda = 100$ $\lambda = 10^{9}$

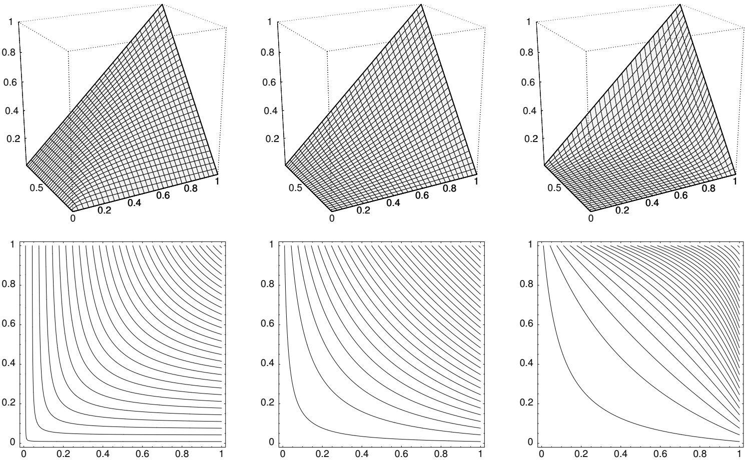


A Hamacher család $(T_\lambda^{\mathbf{H}})_{\lambda\in[0,\infty]}$

$$T_\lambda^{\mathbf{H}}(x,y)=\begin{cases} T_{\mathbf{D}}(x,y) & \text{ha } \lambda=\infty \\ 0 & \text{ha } \lambda=x=y=0 \\ \frac{xy}{\lambda+(1-\lambda)(x+y-xy)} & \text{ha } \lambda\in[0,\infty[\ \text{ és } (\lambda,x,y)\neq(0,0,0) \end{cases}$$

A Hamacher család – példák

$\lambda = 0$ $\qquad$ $\lambda = 2$ $\qquad$ $\lambda = 10$

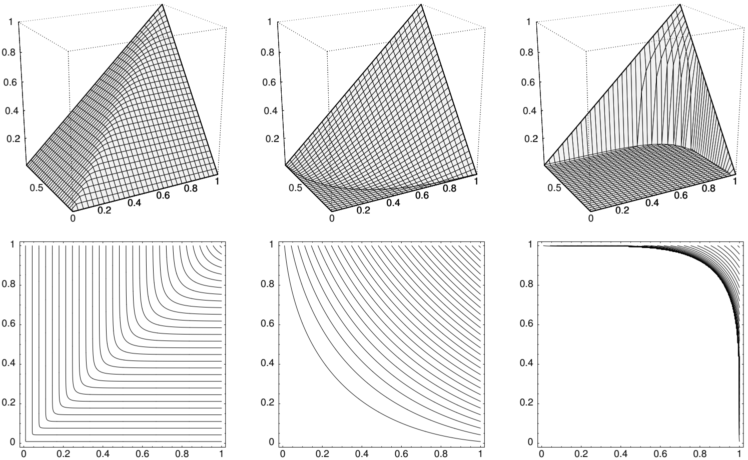


A Schweizer-Sklar család $(T_\lambda^{\mathbf{SS}})_{\lambda\in[-\infty,\infty]}$

$$T_\lambda^{\mathbf{SS}}(x,y) = \begin{cases} T_{\mathbf{M}}(x,y) & \text{ha } \lambda = -\infty \\ T_{\mathbf{P}}(x,y) & \text{ha } \lambda = 0 \\ T_{\mathbf{D}}(x,y) & \text{ha } \lambda = \infty \\ \left(\max\left((x^\lambda + y^\lambda - 1), 0\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}} & \text{ha } \lambda \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]0, \infty[\end{cases}$$

A Schweizer-Sklar család – példák

$\lambda = -10$ $\quad$ $\lambda = 0.5$ $\quad$ $\lambda = 5$

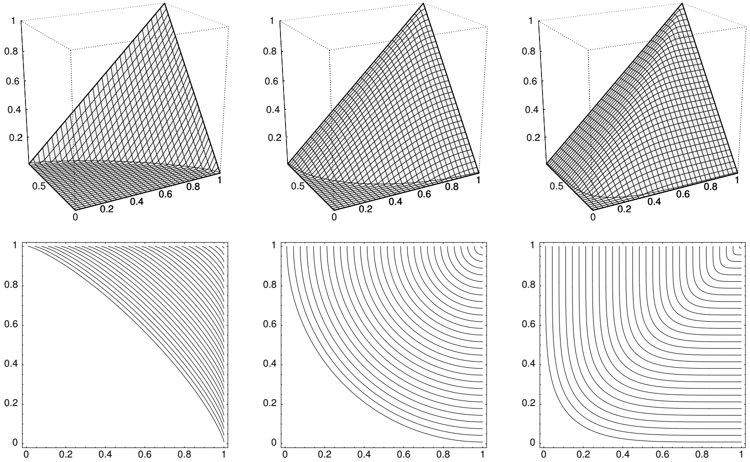


A Yager család $(T^{\mathbf{Y}}_{\lambda})_{\lambda \in [0,\infty]}$

$$T^{\mathbf{Y}}_{\lambda}(x,y) = \begin{cases} T_{\mathbf{D}}(x,y) & \text{ha } \lambda = 0 \\ T_{\mathbf{M}}(x,y) & \text{ha } \lambda = \infty \\ \max\left(1 - \left((1-x)^{\lambda} + (1-y)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}, 0\right) & \text{ha } \lambda \in \,]0,\infty[\end{cases}$$

A Yager család – példák

$\lambda = 0.8$ $\lambda = 2$ $\lambda = 5$



Folytonos Archimédeszi t-normák

Hogyan konstruálhatunk t-normákat?

Tekintsünk egy szigorúan csökkenő folytonos $f : [0,1] \to [0,\infty]$ függvényt, amelyre $f(1) = 0$. Ekkor

$$T_f(x, y) = f^{-1}\big(\min(f(0), f(x) + f(y))\big)$$

egy folytonos t-norma. Azt mondjuk, hogy T-t f generálja. Az f függvényt a T egy generátorának nevezzük.

Belátható, hogy a folytonos Archimédeszi t-normák egyértelműen karakterizálhatók ezen a módon.

Definíció

Egy T t-normát Archimédeszinek nevezünk, ha minden $x, y \in]0,1[$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, amellyel

$$T(\underbrace{x, \dots, x}_{n\text{-szer}}) < y.$$

Folytonos Archimédeszi t-normák reprezentációja

Tétel

Egy T t-norma pontosan akkor folytonos Archimédeszi, ha van olyan szigorúan csökkenő folytonos $f : [0,1] \to [0,\infty]$ függvény, amelyre $f(1) = 0$, és

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)),$$

ahol $f^{(-1)}$ az f pszeudo-inverze:

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & \text{ha } x \leq f(0) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} .$$

Továbbá, a fenti reprezentáció pozitív multiplikatív konstans erejéig egyértelmű.

A standard példák közül folytonos Archimédeszi t-normák:

- $T_{\mathbf{L}}$ (Łukasiewicz-féle)
- $T_{\mathbf{P}}$ (szorzat).

A fenti tétel szerint tehát mindkettőnek létezik generátorfüggvénye:

- $f_{\mathbf{L}}(x) = 1 - x$, és $f_{\mathbf{L}}^{(-1)}(x) = \max\{1 - x, 0\}$, és ezekkel

$$\begin{aligned} \max(x + y - 1, 0) &= T_{\mathbf{L}}(x, y) = f_{\mathbf{L}}^{(-1)}(f_{\mathbf{L}}(x) + f_{\mathbf{L}}(y)) \\ &= \max\{1 - [(1 - x) + (1 - y)], 0\} \end{aligned}$$

- $f_{\mathbf{P}}(x) = -\log(x)$, és $f_{\mathbf{P}}^{(-1)}(x) = f_{\mathbf{P}}^{-1}(x) = \exp(-x)$, és

$$x \cdot y = T_{\mathbf{P}}(x, y) = f_{\mathbf{P}}^{(-1)}(f_{\mathbf{P}}(x) + f_{\mathbf{P}}(y)) = \exp(-[-\log(x) - \log(y)]).$$

A Łukasiewicz-féle t-norma és a szorzat között van egy lényeges különbség: $f_{\mathbf{L}}(0)$ véges, míg $f_{\mathbf{P}}(0)$ végtelen. Emiatt kell ténylegesen a pszeudo-inverzet használni $f_{\mathbf{L}}$ esetén, míg $f_{\mathbf{P}}$-nek a hagyományos inverzét vehetjük.

Definíció

Azt mondjuk, hogy egy T folytonos t-norma

- nilpotens, ha bármely $x \in]0,1[$ számhoz van olyan $y \in]0,1[$, hogy $T(x,y) = 0$;
- szigorú, ha T szigorúan nő a nyílt egységnégyzeten (vagyis $]0,1[^2$-en).

Tétel

Legyen T folytonos Archimédeszi t-norma, generátora pedig f. Ekkor

(a) T pontosan akkor nilpotens, ha $f(0) < +\infty$;

(b) T pontosan akkor szigorú, ha $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Szigorú t-normák

Nyilvánvaló, hogy bármely szigorú t-norma Archimédeszi, mivel $T(x,x) < T(x,1) = x$ minden $x \in]0,1[$ esetén.

Tétel

Egy T folytonos t-norma pontosan akkor szigorú, ha van olyan φ automorfizmusa az egységintervallumnak, hogy

$$T(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x)\varphi(y)) \quad \text{minden } x,y \in [0,1] \text{ esetén.}$$

Vagyis bármely szigorú T t-norma izomorf a szorzattal.

Nilpotens t-normák

Tétel

Egy T folytonos t-norma pontosan akkor nilpotens, ha van olyan φ automorfizmusa az egységintervallumnak, hogy

$$T(x,y) = \varphi^{-1}(\max\{\varphi(x)+\varphi(y)-1,0\}) \quad \text{minden } x,y \in [0,1] \text{ esetén.}$$

Vagyis bármely nilpotens T t-norma izomorf a Łukasiewicz-féle t-normával.

DISZJUNKCIÓK (T-KONORMÁK)

Most a klasszikus logikai diszjunkciót terjesztjük ki. Legyen X adott alaphalmaz, és $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Induljunk ki a klasszikus unió alábbi tulajdonságaiból:

1. $\emptyset \cup A = A$ (identitás);
2. $A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás);
3. Ha $A \subseteq B$, akkor $A \cup C \subseteq B \cup C$ (monotonitás);
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asszociativitás).

Ezeket szeretnénk megőrizni a kiterjesztés során. Vegyük észre, hogy a fenti tulajdonságok – az első kivételével – ugyanazok, mint a konjunkcióra vonatkozó tulajdonságok. Ezért most egyből definiáljuk a diszjunkciót megvalósító $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ függvényt (t-konormát).

Trianguláris konormák (t-konormák)

Definíció

Egy $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ függvényt trianguláris konormának (röviden: t-konormának) nevezünk, ha kommutatív, asszociatív, nemcsökkenő, és $S(0,x) = x$ minden $x \in [0,1]$ esetén.

- Igaz, hogy $S(x,1) = 1$ minden $x \in [0,1]$ esetén;
- Bármely S t-konormára teljesül, hogy $\max(x,y) \leq S(x,y)$ minden $x, y \in [0,1]$ esetén.

Itt max a standard konjunkció. Ez vajon t-konorma?

Természetesen.

A négy standard t-konorma

$$S_{\mathbf{M}}(x, y) = \max(x, y)$$

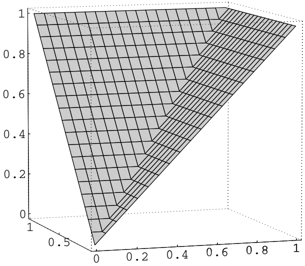
$$S_{\mathbf{P}}(x, y) = x + y - x \cdot y$$

$$S_{\mathbf{L}}(x, y) = \min(x + y, 1)$$

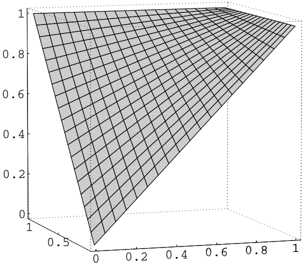
$$S_{\mathbf{D}}(x, y) = \begin{cases} x & \text{ha } y = 0 \\ y & \text{ha } x = 0 \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A négy standard t-konorma (folyt.)

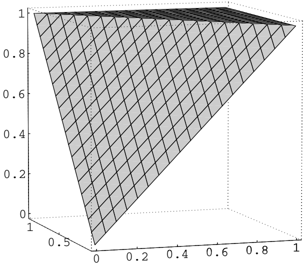
$S_{\mathbf{M}}$



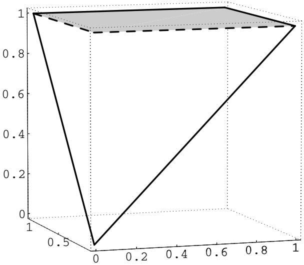
$S_{\mathbf{P}}$



$S_{\mathbf{L}}$



$S_{\mathbf{D}}$



A négy standard t-konorma – néhány észrevétel

- Minden $x, y \in [0, 1]$ esetén

$$S_{\mathbf{M}}(x, y) \leq S_{\mathbf{P}}(x, y) \leq S_{\mathbf{L}}(x, y) \leq S_{\mathbf{D}}(x, y)$$

- Könnyen látható, hogy $S_{\mathbf{D}}$ a legnagyobb t-konorma, és az is, hogy $S_{\mathbf{M}}$ a legkisebb t-konorma.
- $S_{\mathbf{M}}$ az egyetlen idempotens t-konorma ($S(x, x) = x$).
- $S_{\mathbf{D}}$ kivételével a többi folytonos.
- $S_{\mathbf{P}}$ az egyetlen differenciálható és az egyetlen szigorúan növekvő.

Paraméteres t-konorma családok

A Frank család $(S_\lambda^{\mathbf{F}})_{\lambda\in[0,\infty]}$

$$S_\lambda^{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{cases} S_{\mathbf{M}}(x,y) & \text{ha } \lambda = 0 \\ S_{\mathbf{P}}(x,y) & \text{ha } \lambda = 1 \\ S_{\mathbf{L}}(x,y) & \text{ha } \lambda = \infty \\ 1 - \log_\lambda\left(1 + \frac{(\lambda^{1-x}-1)(\lambda^{1-y}-1)}{\lambda-1}\right) & \text{ha } \lambda \in\,]0,1[\, \cup\,]1,\infty[\end{cases}$$

A Hamacher család $(S^{\mathbf{H}}_{\lambda})_{\lambda\in[0,\infty]}$N

$$S^{\mathbf{H}}_{\lambda}(x,y)=\begin{cases} S_{\mathbf{D}}(x,y) & \text{ha } \lambda=\infty \\ 1 & \text{ha } \lambda=0 \text{ and } x=y=1 \\ \frac{x+y+(\lambda-2)xy}{1+(\lambda-1)xy} & \text{ha } \lambda\in\,]0,\infty[\ \text{ és } (\lambda,x,y)\neq(0,1,1) \end{cases}$$

A Schweizer-Sklar család $(S^{\mathbf{SS}}_\lambda)_{\lambda\in[-\infty,\infty]}$

$$S^{\mathbf{SS}}_\lambda(x,y) = \begin{cases} S_{\mathbf{M}}(x,y) & \text{ha } \lambda = -\infty \\ S_{\mathbf{P}}(x,y) & \text{ha } \lambda = 0 \\ S_{\mathbf{D}}(x,y) & \text{ha } \lambda = \infty \\ 1 - \left(\max\left(((1-x)^\lambda + \right.\right. & \left.\left.(1-y)^\lambda - 1), 0\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\ & \text{ha } \lambda \in \,]-\infty,0[\,\cup\,]0,\infty[\end{cases}$$

A Yager család $(S_\lambda^{\mathbf{Y}})_{\lambda \in [0,\infty]}$

$$S_\lambda^{\mathbf{Y}}(x,y) = \begin{cases} S_{\mathbf{D}}(x,y) & \text{ha } \lambda = 0 \\ S_{\mathbf{M}}(x,y) & \text{ha } \lambda = \infty \\ \min\left(\left(x^\lambda + y^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}, 1\right) & \text{ha } \lambda \in \,]0,\infty[\end{cases}$$

t-normából t-konorma (és fordítva)

Legyen T egy t-norma és N egy szigorú negáció. Ekkor

$$S(x, y) = N^{-1}\big(T(N(x), N(y))\big)$$

t-konorma. Vegyük észre, hogy ez a (második) De Morgan azonosság:

$$N(S(x, y)) = T(N(x), N(y)).$$

Hasonlóan, ha S egy t-konorma, akkor

$$T(x, y) = N^{-1}\big(S(N(x), N(y))\big)$$

t-norma. Ez az első De Morgan azonosságnak felel meg:

$$N(T(x, y)) = S(N(x), N(y)).$$

De Morgan hármasok és duális műveletek

Ha N erős negáció, akkor a két De Morgan azonosság ekvivalens.

Egy (T, S, N) rendezett hármast De Morgan hármasnak nevezünk, ha T t-norma, S t-konorma, és N szigorú negáció úgy, hogy a két De Morgan azonosság fennáll.

Egy S t-konorma és egy T t-norma egymás duálisai, ha kielégítik a De Morgan azonosságokat a standard negációval. Vagyis:

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$$
$$T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y)$$

Duális műveletpárok

t-norma	t-konorma
$T_{\mathbf{M}}(x,y) = \min(x,y)$	$S_{\mathbf{M}}(x,y) = \max(x,y)$
$T_{\mathbf{P}}(x,y) = xy$	$S_{\mathbf{P}}(x,y) = x + y - xy$
$T_{\mathbf{L}}(x,y) = \max(x+y-1,0)$	$S_{\mathbf{L}}(x,y) = \min(x+y,1)$
$T_{\mathbf{D}}(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{ha } \max(x,y)=1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$	$S_{\mathbf{D}}(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{ha } \min(x,y)=0, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$

Műveletek fuzzy halmazokon

Műveletek fuzzy halmazokon

Legyen X egy nem-üres halmaz és (T, S, N) egy De Morgan hármas. Az X tetszőleges A, B fuzzy részhalmazai esetén a halmazműveleteket az alábbi módon értelmezzük:

T-metszet $A \cap_T B$:

$$\mu_{A \cap_T B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

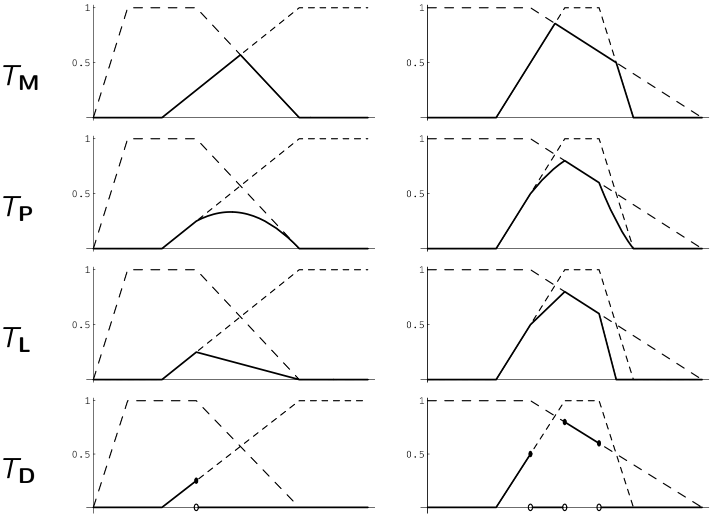
S-unió $A \cup_S B$:

$$\mu_{A \cup_S B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

N-komplementum $\complement_N A$:

$$\mu_{\complement_N A}(x) = N(\mu_A(x))$$

Metszet – példák



Unió – példák